

Uwaga: Są to zadania z pierwszej części listy z wykładu "Symulacje i algorytmiczne zastosowania łańcuchów Markowa" z sem. II 2015/2016.

1. Niech T będzie zmienną losową przyjmującą wartości całkowite nieujemne. Pokaż,

$$\text{że } ET = \sum_{k=0}^{\infty} P(T > k).$$

2. Udowodnij następujący

Lemat 1 (Nierówność Markowa) Niech X będzie nieujemną zmienną losową. Wtedy $\forall r > 0$

$$P(X \geq r) \leq \frac{EX}{r}$$

3. Udowodnij następujący

Lemat 2 (Nierówność Czebyszewa) Niech X będzie zmienną losową o średniej $\mu < \infty$ i wariancji $\sigma^2 < \infty$. Wtedy $\forall r > 0$

$$P(|X - \mu| \geq r) \leq \frac{\sigma^2}{r^2}$$

4. Pokaż, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ mamy $1 + x \leq e^x$

5. Udowodnij następujący

Lemat 3 (Nierówność Chernoffa) Niech X_i będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $P(X_i = 1) = p_i = 1 - P(X_i = 0)$. Niech $S = \sum_{i=1}^n X_i$ oraz $\mu = ES =$

$$\sum_{i=1}^n EX_i = \sum_{i=1}^n p_i. \text{ Wtedy dla każdego } \varepsilon > 0 \text{ zachodzi}$$

$$P(S > (1 + \varepsilon)\mu) \leq \left(\frac{e^\varepsilon}{(1 + \varepsilon)^{1+\varepsilon}} \right)^\mu$$

oraz

$$P(S < (1 - \varepsilon)\mu) \leq \left(\frac{e^{-\varepsilon}}{(1 - \varepsilon)^{1-\varepsilon}} \right)^\mu$$

6. Pokaż, iż poprzednie zadanie implikuje

$$P(S < (1 - \varepsilon)\mu) \leq e^{-\frac{\mu^2 \varepsilon^2}{2}}$$

7. Udowodnij:

$$\forall (1 \leq k \leq n) : \quad \left(\frac{n}{k} \right)^k \leq \binom{n}{k} \leq \left(\frac{ne}{k} \right)^k$$

Kolejne zadania dotyczą następującego schematu: wrzucamy n kul "losowo" do n urn (tzn. z prawd. $1/n$ do każdej z urn).

8. Niech T oznacza liczbę pustych urn. Pokaż, że

$$ET \approx \frac{n}{e}.$$

(możesz użyć przybliżenia $(1 - 1/n)^n \approx \frac{1}{e}$)

9. Pokaż, że

$$Pr[\text{urna nr } i \text{ ma dokładnie } k \text{ kul}] \leq \frac{1}{k!}$$

10. Pokaż, że

$$Pr[\text{urna nr } i \text{ ma co najmniej } k \text{ kul}] \leq \left(\frac{e}{k}\right)^k$$

11. (*) Udowodnij następujące twierdzenie: dla $k = \frac{3 \ln n}{\ln \ln n}$

$$Pr[\text{każda z urn ma co najwyżej } k \text{ kul}] \geq 1 - \frac{1}{n}$$

dla (odpowiednio) dużych n .