Wprowadzenie do symulacji i metod Monte Carlo 18.10.2018

Lista nr 2

Paweł Lorek

Szereg harmoniczny: $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Liczby Stirlinga drugiego rodzaju: $\left\{ {n \atop k} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n$, jest to liczba sposobów podziału zbioru n elementów na k niepustych zbiorów podzbiorów.

1. Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie $Erl(n, \lambda)$ tj. mającą gęstość ($\lambda > 0$)

$$f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0.$$

   Pokaż, że dystrybuanta wyraża się wzorem

$$F(x) = P(X \leq x) = 1 - \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^r e^{-\lambda x}}{r!}.$$

2. Niech S_n będzie zbiorem wszystkich permutacji zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$. Niech Y oznacza zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na S_n, tzn. $\forall \sigma \in S_n$ $Pr(Y = \sigma) = \frac{1}{n!}$. Dla $\sigma \in S_n$ zdefiniujmy

$$f(\sigma) = \#\{i : \sigma(i) = i\},$$

   tzn. $f(\sigma)$ to liczba punktów stałych permutacji σ. Pokaż, że $Ef(Y) = 1$.

3. Niech Y będzie zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na S_n (jak w poprzednim zadaniu). Dla $\sigma \in S_n$ zdefiniujmy

$$C_m(\sigma) = \#\{\text{ cykli długości } m\}$$

   (liczba cykli długości m) oraz $C(\sigma) = \sum_{m=1}^{n} C_m(\sigma)$ (liczba cykli).

   - Ile jest średnio cykli długości m w losowej permutacji n elementow? Tzn. ile wynosi $EC_m(Y)$?
   - Ile jest średnio cykli w losowej permutacji? Tzn. ile wynosci $EC(Y)$?

4. Niech Y będzie zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na S_{100}. Pokaż, że

$$Pr(Y \text{zawiera cykl długości } \geq 51) = 1 - (H_{100} - H_{50}) \approx 0.31183$$

5. Niech $U_1, \ldots, U_n \in [0,1]$. Niech $\hat{F}_n(t) = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}(U_i \le t)$. Zdefiniujmy

$$D_n = \sup_{0 \le t \le 1} |\hat{F}_n(t) - t|.$$

Niech $U_{(1)}, \ldots, U_{(n)}$ będzie statystyką pozycyjną próby $U_1, \ldots, U_n$. Pokaż, że $D_n = \max(D_n^+, D_n^-)$, gdzie

$$D_n^+ = \max_{1 \le i \le n} \left(\frac{i}{n} - U_{(i)}\right), \qquad D_n^- = \max_{1 \le i \le n} \left(U_{(i)} - \frac{i-1}{n}\right).$$

6. (test serii, średnia). Niech n, t, d będą całkowitymi liczbami dodatnimi. Załóżmy, że mamy obserwacje $U_1, \ldots, U_{nt} \in [0,1]$. Dzielimy je grupy po t:

$$\mathbf{U}_1 = (U_1, \ldots, U_t), \mathbf{U}_2 = (U_{t+1}, \ldots, U_{2t}), \qquad \mathbf{U}_n = (U_{(n-1)t+1}, \ldots, U_{nt}).$$

Rozpatrzmy kostkę $[0,1]^t$: dzielimy każdy z boków na d równych odcinków $[i/d, (i+1)/d], i = 0, \ldots, d-1$ i otrzymujemy $k = d^t$ "mini" kostek. Załóżmy, że mamy jakąs numerację kostek $1, 2, \ldots, k$ Niech

$$X_i = \#\{j : \mathbf{U}_j \text{jest w minikostce o numerze } j\}.$$

Zdefiniujmy

$$T = \sum_{j=1}^{k} \frac{(X_j - \frac{n}{k})^2}{\frac{n}{k}}.$$

Zakładając, że $U_1, \ldots, U_n$ są iid o rozkładzie $U(0,1)$ pokaż, że $ET = k - 1$

7. Rozmieszczamy losowo n kul w n urnach (tj. każde rozmieszczenie ma prawd. n^{-n}. Niech A_k oznacza zdarzenie, że jest dokładnie k urn pustych.

Pokaż, że

$$Pr(A_k) = \binom{n}{k} \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \binom{n-k}{i} \left(1 - \frac{k+i}{n}\right)^n$$