

1. (Metoda zmiennych kontrolnych: Estymacja π c.d.) Niech $Y_i = 4\mathbf{1}(U_{i,1}^2 + U_{i,2}^2 \leq 1)$, gdzie $U_{i,j}, i = 1, 2, j = 1, \dots, n$ są iid $U(0, 1)$. Wówczas $\hat{Y}_n^{CMC} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$ jest estymatorem liczby π o wariancji $Var(\hat{Y}_n^{CMC}) = \frac{1}{n} 2.6968$. Wylicz wariancję estymatora zmiennych kontrolnych \hat{Y}_n^{CV} biorąc za zmienną kontrolną $X_i = \mathbf{1}(U_{i,1} + U_{i,2} > 2)$.

2. (Metoda zmiennych antytetycznych). Zastosuj metodę zmiennych antytetycznych do oszacowania

$$I = \int_0^1 e^x dx,$$

biorąc $Y_{2i-1} = e^{U_i}$ oraz $Y_{2i} = e^{1-U_i}$. Jaka jest procentowa redukcja wariancji \hat{Y}_n^* w stosunku do \hat{Y}_n^{CMC} ?

3. (Metoda zmiennych antytetycznych: Estymacja π c.d.). Zastosuj metodę zmiennych antytetycznych do oszacowania

$$I = \int_0^1 4\sqrt{1-x^2} dx$$

(skądinąd wiemy, iż to jest π) biorąc $Y_{2i-1} = 4\sqrt{1-U_i^2}$ oraz $Y_{2i} = 4\sqrt{1-(1-U_i)^2}$ oraz $\hat{Y}_n^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$. Jaka jest procentowa redukcja wariancji \hat{Y}_n^* w stosunku do \hat{Y}_n^{CMC} ?

4. (Losowanie istotnościowe) Podaj procedurę losowania istotnościowego dla estymacji

$$I = \int_0^1 e^{-x^2} dx$$

biorąc X o gęstości $\tilde{f}(x) = re^{-x}$ (dobierając r tak, by \tilde{f} była gęstością na $(0, 1)$). Jaka jest procentowa redukcja wariancji \hat{Y}_n^{IS} w stosunku do \hat{Y}_n^{CMC} ? (użyj komputera do wyliczenia odpowiednich całek).

5. (Losowanie istotnościowe) Podaj procedurę losowania istotnościowego dla estymacji

$$I = \int_0^1 x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

dla $\alpha = 3/4$ biorąc X takie jak w poprzednim zadaniu (tj. o gęstości $\tilde{f}(x) = re^{-x}$), przyjmując $k(x) = x^{\alpha-1}e^{-x}$ oraz $f(x) = 1$. Jaka jest procentowa redukcja wariancji \hat{Y}_n^{IS} w stosunku do \hat{Y}_n^{CMC} ? (użyj komputera do wyliczenia odpowiednich całek).