

1. Losujemy X z rozkładem $Pois(\lambda)$. Następnie rzucamy X razy (niezależnie) niesymetryczną monetą: z prawdopodobieństwem p otrzymujemy Orła, z prawdopodobieństwem $1 - p$ otrzymujemy Reszkę. Niech X_1 oznacza liczbę otrzymanych Orłów, a X_2 liczbę otrzymanych Reszek (oczywiście $X = X_1 + X_2$). Pokaż, iż X_1 ma rozkład $Pois(p\lambda)$, X_2 ma rozkład $Pois((1-p)\lambda)$ oraz, że zmienne losowe X_1 i X_2 są niezależne.
2. Jeśli $U_1, \dots, U_n$ są iid o rozkładzie $U[0, t]$, to rozkład łączny ma gęstość

$$f_{U_1, \dots, U_n}(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \frac{1}{t^n} & \text{jeśli } 0 \leq x_i \leq t, i = 1, \dots, n \\ 0 & \text{wp.p.} \end{cases}$$

Jeśli przez $W_1 \leq W_2 \leq \dots \leq W_n$ oznaczymy posortowane $U_1, \dots, U_n$, to łączna gęstość wektora $(W_1, \dots, W_n)$ jest następująca

$$f_{W_1, \dots, W_n}(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \frac{n!}{t^n} & \text{jeśli } 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq t \\ 0 & \text{wp.p.} \end{cases}$$

Teraz, niech $N(t)$ będzie $Pois(\lambda)$ (jednorodnym procesem Poissona z parametrem λ), oznaczmy punkty zgłoszeń przez $A_1, A_2, \dots$. Warunkując, iż $N(t) = n$ pokaż, że wektor $(A_1, \dots, A_n)$ ma taki sam rozkład jak $(W_1, \dots, W_n)$.

3. Niech X będzie łańcuchem Markowa na przestrzeni $E = \{1, 2, 3, 4\}$ z macierzą przejść

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

oraz z rozkładem początkowym $\nu^0 = (P(X_0 = 1), P(X_0 = 2), P(X_0 = 3), P(X_0 = 4)) = (1, 0, 0, 0)$

- a) Oblicz ν^3
- b) Oblicz ν^n ("zgadując" rozwiązanie i udowadniając indukcyjnie, że jest ono poprawne).

4. (Podobne do tego co było na wykładzie). Model pogody Gothenburga. Rozważmy uproszczony model pogody: rozważamy tylko dwa stany: “deszcz” i “słońce”. Po dniu deszczowym następuje dzień deszczowy z prawd. 0.75, natomiast po dniu słonecznym następuje dzień słoneczny z prawd. również 0.75. Oznaczmy przestrzeń stanów $E = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, gdzie $\mathbf{e}_1$ oznacza dzień deszczowy, a $\mathbf{e}_2$ dzień słoneczny. Wtedy macierz przejść wygląda następująco:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}$$

Założmy, że rozkład początkowy jest następujący: $\nu^0 = (P(X_0 = 1), P(X_0 = 2)) = (0, 1)$.

- a) Oblicz ν^2 .
 - b) Oblicz ν^n stosując diagonalizację macierzy $\mathbf{P}$ (możesz do tego posłużyć się komputerem i przedstawić wynik).
5. Dla poprzedniego przykładu wylicz $\pi = \lim_k \nu^k$, pokaż, że nie zależy on od ν^0 , policz $d_{TV}(\nu \mathbf{P}^k, \pi)$ oraz podaj mixing time $\tau(\varepsilon) = \min\{n \geq 0 : d_{TV}(\nu \mathbf{P}^k, \pi) \leq \varepsilon\}$.