Wprowadzenie do symulacji i metod Monte Carlo	03.01.2019
Lista nr 6	
Paweł Lorek	

1. *Proces urodzin i śmierci z dwoma odbijającymi barierami.* Niech X będzie łańcuchem Markowa na przestrzeni stanów $\mathbb{E} = \{0, 1, \ldots, N\}$ z następującą macierzą przejść:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ q_1 & r_1 & p_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & q_2 & r_2 & p_2 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ 0 & 0 & 0 & q_i & r_i & p_i & 0\ldots & 0 \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \ldots & & & & q_{N-1} & r_{N-1} & p_{N-1} \\ 0 & \ldots & & & & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

gdzie dla każdego $i \in \{1, \ldots, N-1\}$: $p_i > 0, q_i > 0, p_i + q_i + r_i = 1$. Znajdź rozkład stacjonarny tego łańcucha.

Wsk: Łańcuch jest odwracalny.

2. Znajdź rozklad stacjonarny łańcucha Markowa X na przestrzeni $\mathbb{E} = \{1, 2, 3\}$ o macierzy przejść

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha & 0 \\ 0 & 1-\beta & \beta \\ \gamma & 0 & 1-\gamma \end{bmatrix},$$

gdzie $\alpha, \beta, \gamma \in (0, 1)$.

3. Normę całkowitego wahania między miarami ν i μ na $\mathbb{E}$ zdefiniowaliśmy jako $d_{TV}(\mu, \nu) = \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{e}\in\mathbb{E}} |\mu(\mathbf{e}) - \nu(\mathbf{e})|$. Pokaż, że

$$d_{TV}(\mu, \nu) = \max_{A\subseteq\mathbb{E}} |\mu(A) - \nu(A)|,$$

gdzie $\mu(A) := \sum_{\mathbf{e}\in A} \mu(\mathbf{e})$.

4. Rozważmy następujący łańcuch Markowa X: Niech $a, b \geq 2$ będą liczbami całkowitymi. Przestrzeń stanów:

$$\mathbb{E} = \{(x, y) : x \in \{0, \ldots, a-1\}, y \in \{0, \ldots, b-1\}\}.$$

Dynamika łańcucha jest nastepująca: Będąc w stanie (x, y) w chwili n, w następnej chwili łańcuch albo jest w stanie $((x+1) \bmod a, y)$ z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ albo w stanie $(x, (y+1) \bmod b)$ z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$.

- Pokaż, że łańcuch X jest nieredukowalny
- Pokaż, że łańcuch X jess nieokresowy wtedy i tylko wtedy, gdy $\gcd(a, b) = 1$
- W przypadku $\gcd(a, b) = 1$ wskaż rozkład stacjonarny.

5. Ustalmy liczbę całkowitą $n > 0$. Rozważmy też nieskończony ciąg prób Bernouliego (zer i jedynek) $b_1, b_2, \ldots$. W chwili i patrzymy na okno rozmiaru n: $b_i, b_{i+1}, \ldots, b_{n-1}$. Niech X_i oznacza długość bloku samych jedynek występujących z prawej str. okna (tak, że żadne 0 tam się nie pojawia). Oto przyklad ($n = 6$):

czas	ciąg	X_k
k	...1(001011)110101...	2
$k+1$	...10(010111)10101...	3
$k+2$	...100(101111)0101...	4
$k+3$	...1001(011110)101...	0
$k+4$	...10010(111101)01...	0

(a) $\{X_i\}_{i \geq 1}$ jest łańcuchem Markowa. Podaj przestrzeń stanów $\mathbb{E}$, macierz przejścia $\mathbf{P}$ i znajdź rozkład stacjonarny.

(b) Znajdź coupling i oszacuj $d_{TV}(\nu \mathbf{P}^k, \pi)$.

6. Rozważmy łańcuch Markowa X na $\mathbb{E} = \{0, 1\}^d$ z macierzą

$$\mathbf{P}(\mathbf{e}, \mathbf{e}') = \begin{cases} \dfrac{1}{d+1} & \text{jeśli } \mathbf{e}' = \mathbf{e} \pm s_i \text{ lub } \mathbf{e}' = \mathbf{e}, \\ 0 & w\ p.p, \end{cases}$$

gdzie $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, \mathbf{e}_d), e_i \in \{0, 1\}$ oraz $s_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ (jedynka na pozycji i).

Innymi słowy, dynamika jest następująca

- Z prawdopodobieństwem $\frac{1}{d+1}$ nic nie rób.
- W przeciwnym razie, z prawd. $\frac{1}{d+1}$ zmień jedną ze współrzędnych na przeciwną.

(a*) Znajdź (rozsądny) coupling.

(b*) Znajdź/oszacuj mixing (poprzez nierówność couplingową)

Uwaga: na wykładzie pokazana była wersja, gdzie z prawd. $1/2$ nic się nie działo, a w p.p. losowana była jedna ze wsp. i zmieniana na przeciwna.