Wprowadzenie do symulacji i metod Monte Carlo 16.01.2019

Lista nr 7

Paweł Lorek

Hard-core model. Mamy dany graf $G = (V, K)$, gdzie $V = \{v_1, \ldots, v_M\}$ (wierzchołki) oraz K jest zbiorem krawędzi. Do każdego wierzchołka przypisujemy *spin* -1 lub $+1$, każde takie przypisanie nazywamy *konfiguracją*.
$\xi \in \{-1, +1\}^V$ jest natomiast *poprawną konfiguracją* (PK) jeśli żadne 2 wierzchołki, które są sąsiadami w grafie G nie mają oba wartości $+1$.
Na wykładzie podana była konstrukcja MCMC (Gibbs sampler), którego przestrzeń stanów jest zbiorem wszystkich możliwych poprawnych konfiguracji, a rozkładem stacjonarnym jest rozkład jednostajny:

$$\pi_G(\xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{Z_G} & \text{jeśli } \xi \in PK \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases},$$

gdzie Z_G jest stałą normalizacyjną, tj. $Z_G = \displaystyle\sum_{\xi \in \{0,1\}^V} \mathbf{1}(\xi \in PK)$.

1. Pokaż, że algorytm Gibbs dla modelu hard-core jest *nieredukowalnym* łańcuchem Markowa.

2. Pokaż, że dla każdego wierzchołka $v \in V$, warunkowe prawdopodobieństwo, że v przyjmuje wartość $+1$, pod warunkiem, że wszyscy sąsiedzi mają wartość -1, wynosi $1/2$.

3. Rozważmy następujący **uogólniony hard-core model**. Model ten pozwala na różne "intensywności $+1$" w grafie. Jest to zrobione poprzez wprowadzenie parametru $\lambda > 0$. W tym modelu każda poprawna konfiguracja ma prawdopodobieństwo

$$\pi_{G,\lambda}(\xi) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^{\eta(\xi)}}{Z_{G,\lambda}} & \text{jeśli } \xi \in PK \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases},$$

   gdzie $\eta(\xi)$ jest liczbą "plus jedynek" w konfiguracji ξ, a $Z_{G,\lambda}$ jest stałą normalizacyjną, tj. $Z_{G,\lambda} = \displaystyle\sum_{\xi \in \{0,1\}^V} \lambda^{\eta(\xi)} \mathbf{1}(\xi \in PK)$.

   Udowodnij, że dla każdego wierzchołka $v \in V$, wartunkowe prawdopodobieństwo, że v przyjmuje wartość $+1$, pod warunkiem, że wszyscy sąsiedzie mają wartość -1, wynosi $\dfrac{\lambda}{\lambda + 1}$.

4. Skonstruuj algorytm MCMC dla uogólnionego modelu hard-core.

5. Łańcuch Markowa X o macierzy przejść $\mathbf{P}$ na przestrzeni stanów $E = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_N\}$ z porządkiem częściowym $\preceq$ nazywa się *stochastycznie monotonicznym* jeśli:

$$\forall(\mathbf{e}_i \preceq \mathbf{e}_j)\forall(A \in \mathcal{U}) \quad P(\mathbf{e}_i, A) \leq P(\mathbf{e}_j, A),$$

gdzie $\mathcal{U}$ jest klasą tzw. zbiorów górnych, tzn. $A \in \mathcal{U}$ jeśli mamy następującą implikację: $(\mathbf{e}_i \preceq \mathbf{e}_j, i \in A) \Rightarrow (j \in A)$ (słownie: jeśli mamy dwa porównywalne stany, i mniejszy z nich należy do A, to większy też musi należeć do A).

Podaj warunki na to, by proces urodzin i śmierci z macierzą przejścia podaną w zad. 1 na Liście 6. był stochastycznie monotoniczny względem porządku liniowego $\leq$.

6. Funkcją updatująca jest *monotoniczna* względem porządku częściowego $\preceq$ jeśli

$$\forall(\mathbf{e}_i \leq \mathbf{e}_j) \;\; \forall(u \in [0,1]) \qquad \phi(\mathbf{e}_i, u) \preceq \phi(\mathbf{e}_j, u)$$

Z kolei łańcuch Markowa o macierzy przejść $\mathbf{P}$ jest *realizowalnie monotoniczny* jeśli istnieje monotoniczna funkcja updatująca.

Dla zadania 4. z Listy 5. wskaż (względem porządku liniowego)

a) Poprawną i monotoniczną funkcję updatującą.

b) Poprawną, ale nie monotoniczną funkcję updatującą.

7. Podaj warunki na to, by proces urodzin i śmierci z macierzą przejścia podaną w zad. 1 na Liście 6. był realizowalnie monotoniczny względem porządku liniowego $\leq$ (i wskaż wówczas monotoniczną funkcję updatującą).

8. Przypomnij algorytm CFTP (Coupling From The Past), omów jego działanie na przykładzie poprzedniego zadania.