Wprowadzenie do symulacji i metod Monte Carlo 30.10.2019

Lista nr 2, ver 2

Paweł Lorek

Niech S_n będzie zbiorem wszystkich permutacji zbioru $\{1,2,\ldots,n\}$. Niech Y oznacza zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na S_n, tzn. $\forall \sigma \in S_n \; Pr(Y=\sigma)=\frac{1}{n!}$. Dla $\sigma \in S_n$ zdefiniujmy

$$f(\sigma)=\#\{i:\sigma(i)=i\},$$

tzn. $f(\sigma)$ to liczba punktów stałych permutacji σ. Oznaczmy $X=f(Y)$. (w zadaniu 9. z Listy 1. pokazaliśmy, że $EX=1$)

1. Zdefiniujmy $f_i(\sigma)=\mathbf{1}(\sigma(i)=i)$. Wówczas mamy $f(\sigma)=\sum_{i=1}^{n} f_i(\sigma)$ oraz $X=\sum_{i=1}^{n} X_i$, gdzie $X_i=f_i(Y)$. Policz $Cov(X_i,X_j)$, a następnie $VarX$.

2. Niech $\mathcal{D}_n$ będzie zbiorem permutacji n elementów bez punktów stałych. Pokaż, że

$$d_n=|\mathcal{D}_n|=\sum_{i=1}^{n}(-1)^n\binom{n}{i}(n-i)!.$$

3. Pokaż, że

$$\left|\frac{d_n}{n!}-e^{-1}\right|\leq\frac{1}{(n+1)!}.$$

(Co oznacza, że $\frac{d_n}{n!}\sim e^{-1}$ oraz, że błąd jest mały nawet dla niedużego n)

4. Używając przybliżenia z poprzedniego zadania, pokaż, że $P(X=k)$ dąży (gdy $n\to\infty$) do $P(N=k)$, gdzie N jest zmienną Poissona o średniej 1.