Wprowadzenie do symulacji i metod Monte Carlo 12.11.2019

Lista nr 3

Paweł Lorek

$X \sim$ Gumbel z parametrami $\mu \in \mathbf{R}$ oraz $\sigma > 0$: dystrybuanta $F(x;\mu,\sigma) = \exp(-e^{-(x-\mu)/\sigma})$.

1. Ciągła wersja metody eliminacji. Cel: chcemy wygenerować zmienną losową X o gęstości $f(x)$ umiejąc generować Y o gęstości $g(y)$, gdzie $f(x) \leq cg(x)$ dla $c \geq 1$. Algorytm:

   1. Wygeneruj Y z gęstością $g(y)$
   2. Jeśli $cUg(Y) \leq f(Y)$ (gdzie $U \sim U(0,1)$ niezależna od Y) to podstaw $X := Y$
   3. w przeciwnym przypadku GOTO 1

   Podaj dowód poprawności algortymu (tzn., że wynikiem jest zmienna losowa X o gęstości $f(x)$).

2. Niech $U \sim U(0,1)$. Dla $p \in (0,1)$ zdefiniujmy

$$X = \left\lfloor \frac{\log U}{\log(1-p)} \right\rfloor.$$

   Jaki rozkład ma zmienna X?

3. Pokaż, iż dla $U \sim U(0,1)$ zmienna $X = -\log(-\log(U))$ ma rozkład Gumbela z parametrami $\mu = 0, \sigma = 1$. Jak z X uzyskać zmienną o rozkładzie Gumbela z dowolnymi parametrami $\mu, \sigma > 0$?

4. Niech X ma dystrybuantę F i chcemy wygenerować zmienna losową o warunkowym rozkładzie $X|X \in (a,b)$ gdzie $P(X \in (a,b)) > 0$. Niech

$$V = F(a) + (F(b) - F(a))U, \quad \text{gdzie } U \sim \mathcal{U}(0,1).$$

   Pokaż, że $Y = F^{\leftarrow}(V)$ ma żądaną warunkową dystrybuantę G, gdzie

$$G(x) = \begin{cases} 0 & x < a, \\ \dfrac{F(x) - F(a)}{F(b) - F(a)}, & a \leq x < b, \\ 1 & x \geq b. \end{cases}$$

5. (a) Niech $U \sim U(0,1)$. Pokaż, że $X = \tan(\pi(U - 1/2))$ ma rozkład Cauchyego, tj. gęstość $f(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$.

   (b) Podaj inny sposób wysymulowania zmiennej losowej o rozkładzie Cauchyego.

6. Niech $U \sim \mathcal{U}(0,1)$ oraz $Y = \lfloor U^{-1} \rfloor$ ($\lfloor x \rfloor$ to największa liczba całkowita mniejsza lub równa x). Pokaż, że $P(Y=k) = \dfrac{1}{k(k+1)}, k = 1, 2 \ldots$

7. Podaj algorytm i oblicz ć prawdopodobieństwo akceptacji na wygenerowanie metodą eliminacji dyskretnej liczby losowej X z funkcją prawdopodobieństwa $\{p_k,\ k = 1, 2, \ldots\}$, gdzie
$$p_k = \frac{6}{\pi^2}\frac{1}{k^2}, \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

8. Podaj algorytm i oblicz ć prawdopodobieństwo akceptacji na wygenerowanie metodą eliminacji dyskretnej liczby losowej X z funkcją prawdopodobieństwa $\{p_k,\ k = 1, 2, \ldots\}$, gdzie $p_k = \dfrac{90}{\pi^4}\dfrac{1}{k^4}$.

9. Pokaż jak metodą eliminacji wylosować zmienną losową o rozładzie $N(0,1)$ używając zmiennej losowej $\mathrm{Exp}(\lambda)$, tj. o gęstości $g_2(y) = \lambda e^{-\lambda y}\mathbf{1}(y \geq 0)$. Dla jakiego λ prawdopodobieństwo akceptacji jest największe?

10. Podaj (i wyjaśnij) metodę eliminacji do symulowania zmiennej losowej z rozkładu $X \sim N(0,1)$ przy pomocy zmiennej losowej Y z rozkładu Cauchyego. Wskaż optymalne c.

    Czy można symulować metodą eliminacji zmienną losową z rozkładu Cauchyego za pomocą zmiennej losowej z rozkładu normalnego?

11. (a) Oblicz gęstość $\max(U_1, \ldots, U_n)$, gdzie $U_i, i = 1, \ldots, n$ są iid o rozkładzie $\mathcal{U}(0,1)$.

    (b) Pokaż, jak wysymulować zmienną losową o gęstości
    $$f(x) = \sum_{j=1}^{N} a_j x^j, \quad 0 \leq x \leq 1$$
    metodą superpozycji – podaj jaki warunek musi spełniać ciąg (a_i).