Wprowadzenie do symulacji i metod Monte Carlo 08.01.2020

Lista nr 4 ver 3

Paweł Lorek

Uwaga: *W poniższych zadaniach wypisz jakie całki trzeba policzyć – jednak przedstawiając rozwiązanie wystarczy podać wynik (można wcześniej użyć komputera do ich wyliczenia).*

1. Rozważmy szacowanie całki $I = \int_0^1 e^{-x^2} dx$.

   UWAGA: W poniższych wyliczeniach wariancji możesz przyjąć:
   $\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx 0.7468, \quad \int_0^1 \left(e^{-x^2}\right)^2 dx \approx 0.59814$
   Rozważmy dwa estymatory

   1. $\hat{Y}_n^{HoM} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$, gdzie $Y_i = \mathbf{1}(e^{-U_{2i}^2} > U_{2i-1})$, a $U_1, \ldots U_{2n}$ są i.i.d. $U(0,1)$.
   2. $\hat{Y}_n^{CMC} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$, gdzie $Y_i = e^{-U_i^2}$, a $U_1, \ldots U_n$ są i.i.d. $U(0,1)$.

   Jaki są wariancje powyższych estymatorów? Ile wynosi $\frac{Var\hat{Y}^{HoM}}{Var\hat{Y}^{CMC}}$? Ile musimy wykonwać symulacji (tzn. jakie musi być n) by mieć móc stwierdzić iż $Pr(I \in [\hat{Y}_n - b, \hat{Y}_n + b]) = 0.95$ dla $b = 0.005$ (odpowiedz dla $\hat{Y}_n$ będącego $\hat{Y}_n^{HoM}$ lub $\hat{Y}_n^{CMC}$).

2. Poprzednie zadanie było trochę "sztuczne" w tym sensie, że do wyliczenia wariancji użyliśmy wiedzy na temat tego co trzeba policzyć... Mamy następujące oszacowania:
   $$1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{6}x^6 \le e^{-x^2} \le 1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4.$$
   Wykorzystaj je, by oszacować $Var\hat{Y}^{CMC}$ oraz $Var\hat{Y}^{HoM}$.

   Korzystając z tych oszacowań powiedz też ile musimy wykonwać symulacji (tzn. jakie musi być n) by mieć móc stwierdzić iż $Pr(I \in [\hat{Y}_n - b, \hat{Y}_n + b]) = 0.95$ dla $b = 0.005$ (odpowiedz dla $\hat{Y}_n$ będącego $\hat{Y}_n^{HoM}$ lub $\hat{Y}_n^{CMC}$).

   UWAGA: Nie musisz ręcznie liczyć całek (co do zasady prostych - to są całki z wielomianów), możesz wspomóc się tutaj komputerem.

3. (Metoda zmiennych antytetycznych). Zastosuj metodę zmiennych antytetycznych do oszacowania
$$I = \int_0^1 e^x dx,$$
biorąc $Y_{2i-1} = e^{U_i}$ oraz $Y_{2i} = e^{1-U_i}$ oraz $\hat{Y}_n^{ant} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$. Jaka jest procentowa redukcja wariancji $\hat{Y}_n^{ant}$ w stosunku do $\hat{Y}_n^{CMC}$?

4. (Metoda zmiennych antytetycznych: Estymacja π). Zastosuj metodę zmiennych antytetycznych do oszacowania
$$I = \int_0^1 4\sqrt{1-x^2}dx$$
(skądinąd wiemy, iż to jest π) biorąc $Y_{2i-1} = 4\sqrt{1-U_i^2}$ oraz $Y_{2i} = 4\sqrt{1-(1-U_i)^2}$ oraz $\hat{Y}_n^{ant} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$. Jaka jest procentowa redukcja wariancji $\hat{Y}_n^{ant}$ w stosunku do $\hat{Y}_n^{CMC}$?