Wprowadzenie do symulacji i metod Monte Carlo 08.01.2020

Lista nr 5 ver 2

Paweł Lorek

Uwaga: *W poniższych zadaniach wypisz jakie całki trzeba policzyć – jednak przedstawiając rozwiązanie wystarczy podać wynik (można wcześniej użyć komputera do ich wyliczenia).*

1. (Metoda zmiennych kontrolnych: Estymacja π c.d.) Niech $Y_i = 4\mathbf{1}(U_{i,1}^2 + U_{i,2}^2 \leq 1)$, gdzie $U_{i,j}, i = 1, \ldots n, j = 1, 2$, są iid $U(0,1)$. Wówczas $\hat{Y}^{CMC} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$ jest estymatorem liczby π o wariancji $Var(\hat{Y}^{CMC}) = \frac{1}{n}2.6968$. Wylicz wariancję estymatora zmiennych kontrolnych $\hat{Y}_n^{CV}$ biorąc za zmienną kontrolną $X_i = \mathbf{1}(U_{i,1} + U_{i,2} > 1)$.

2. (Metoda zmiennych antytetycznych). Zastosuj metodę zmiennych antytetycznych do oszacowania
$$I = \int_0^1 e^x dx,$$
biorąc $Y_{2i-1} = e^{U_i}$ oraz $Y_{2i} = e^{1-U_i}$. Jaka jest procentowa redukcja wariancji $\hat{Y}_n^*$ w stosunku do $\hat{Y}_n^{CMC}$?

3. (Losowanie istotnościowe) Interesuje nas oszacowanie
$$I = \int_0^1 e^{-x^2} dx$$
   (a) Niech $\tilde{f}(x) = re^{-x}$. Dobierz r tak, by $\tilde{f}$ była gęstością na $(0,1)$. Jak wysymulować zmienną $\tilde{X}$ o gęstości $\tilde{f}$?

   (b) Podaj procedurę losowania istotnościowego dla estymacji I biorąc $\tilde{X}$ o gęstości $\tilde{f}(x)$. Jaka jest procentowa redukcja wariancji $\hat{Y}_n^{IS}$ w stosunku do $\hat{Y}_n^{CMC}$? (użyj komputera do wyliczenia odpowiednich całek).

4. (Losowanie istotnościowe) Podaj procedurę losowania istotnościowego dla estymacji
$$I = \int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x} dx$$
dla $\alpha = 3/4$ biorąc X takie jak w poprzednim zadaniu (tj. o gęstości $\tilde{f}(x) = re^{-x}$), przyjmując $k(x) = x^{\alpha-1}e^{-x}$ oraz $f(x) = 1$. Jaka jest procentowa redukcja wariancji $\hat{Y}_n^{IS}$ w stosunku do $\hat{Y}_n^{CMC}$? (użyj komputera do wyliczenia odpowiednich całek).