Nowe układy współrzędnych - **MACIERZ PRZEJŚCIA**, kilka zadań z Listy nr 5

Uwaga: Punkt X będzie utożsamiany z wektorem $\vec{X}$ (i zapisywany jako X).

Niech X oznacza punkt w (zwykłym) kartezjańskim układzie współrzędnych O_{xyz}. Nowy układ współrzędnych $O_{u_1u_2u_3}$ wyznaczony jest przez trzy wersowy, liniowo niezależne wektory F_1, F_2, F_3 (każdy wektor postaci $t \cdot F_i$ leży na osi u_i).

Definicja 1 *Mówimy, iż punkt X ma w układzie $O_{u_1u_2u_3}$ o wersorach F_1, F_2, F_3 współrzędne* $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = U$ *wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$X = u_1F_1 + u_2F_2 + u_3F_3. \tag{1}$$

Niech f oznacza macierz utworzoną ze współrzędnych wersorów F_i jako kolumn, tzn.

$$f = (F_1F_2F_3) = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{pmatrix},$$

gdzie $F_i = \begin{pmatrix} f_{1i} \\ f_{2i} \\ f_{3i} \end{pmatrix}$.

(1) możemy zapisać

$$X = u_1 \begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{21} \\ f_{31} \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} f_{12} \\ f_{22} \\ f_{32} \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} f_{13} \\ f_{23} \\ f_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1f_{11} + u_2f_{12} + u_3f_{13} \\ u_1f_{21} + u_2f_{22} + u_3f_{23} \\ u_1f_{31} + u_2f_{32} + u_3f_{33} \end{pmatrix} = f \cdot U$$

czyli

$$X = fU. \tag{2}$$

Definicja 2 *Macierz, która wiąże punkt X w układzie współrzędnych O_{xyz} z punktem U w układzie współrzędnych $O_{u_1u_2u_3}$ w taki sposób, że zachodzi (2) nazywamy* **macierzą przejścia**.

Uwaga dotycząca nazewnictwa. Często ta macierz jest nazywana *macierzą przejście do nowego układu współrzędnych* $O_{u_1u_2u_3}$, co jest niezgodne z intuicją. Dlatego najwygodniej jest "nie mówić" z jakiego do jakiego układu jest to macierz przejścia.

Aby natomiast wyrazić współrzędne wektora U mając dane współrzędne X w O_{xyz} mnożymy obie strony (2) przez f^{-1} (istnieje, bo F_i są liniowo niezależne) i otrzymujemy

$$U = f^{-1}X. \tag{3}$$

Załóżmy teraz, że mamy przekształcenie liniowe T o macierzy $m(T) \equiv m$. Chcemy mieć macierz m' tego przekształcenia w nowym układzie współrzędnych. Niech $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Obrazem tego wektora jest $T(X) = m \cdot X$. Z (3) wiemy, że punkt dowolny punkt Y ma w nowym układzie współrzędne $U = f^{-1}Y$. Dla $Y = T(X)$ mamy zatem iż obrazem wektora X w układzie $O_{u_1u_2u_3}$ jest $f^{-1}m \cdot X$. A skoro m' jest macierzą przekształcenia T w układzie $O_{u_1u_2u_3}$, to $T(X)$ ma w tym układzie współrzędne $m'U$. Mamy zatem

$$f^{-1}mX = m'U = m'f^{-1}X.$$

Ponieważ powyższe jest prawdziwe dla każdego X to można pokazać, ze musi zachodzić

$$f^{-1}m = m'U = m'f^{-1}.$$

Mnożąc obie strony prawostronnie przez *macierz przejścia* f otrzymujemy

$$m' = f^{-1}mf. \tag{4}$$

KILKA ZADAŃ Z LISTY 5

7. Dane są wektory $F_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $F_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $F_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ oraz ukośnokątny układ współrzędnych $O_{u_1u_2u_3}$, w którym wektory te są wersorami.

(a) Jakie współrzędne (w układzie $O_{x_1x_2x_3}$) ma wektor X, który w układzie współrzędnych ma współrzędne $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$?

(b) Napisz macierz przejścia f do układu $O_{u_1u_2u_3}$

UWAGA: Zgodnie z poprzednimi uwagami najlepiej rozumieć to zadanie jako:

" Napisz macierz przejścia f".

(c) Znajdź współrzędne wektora $X = \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix}$ w układzie $O_{u_1u_2u_3}$.

(d) Zapisz wzory wyrażające współrzędne x_i poprzez współrzędne u_i oraz odwrotnie, współrzędne u_i poprzez współrzędne x_i.

(e) Przekształcenie $T : R^3 \to R^3$ zadane jest macierzą $m = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. Znajdź macierz m' przekształcenia T w układzie $O_{u_1u_2u_3}$

Rozwiązenie. Najlepiej najpierw wyznaczyć **macierz przejścia** (tj. podpunkt (b)) i potem użyć go do (a)

(b)

$$f = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Zgodnie z (2) mamy

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = fU = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(c) By użyć (3) policzmy najpierw f^{-1}:

$$f^{-1} = \ldots = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{8} & \frac{7}{8} & -\frac{1}{16} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}$$

Mamu

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = U = f^{-1}X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{8} & \frac{7}{8} & -\frac{1}{16} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{125}{16} \\ -\frac{3}{16} \end{pmatrix}$$

(d) (To jest to samo co podpunkty (a) i (c) tylko nie ma konkretnych wektorów)
Współrzędne x_i poprzez u_i:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = fU = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 - u_2 + 7u_3 \\ u_2 + u_3 \\ -2u_1 \end{pmatrix}$$

Współrzędne u_i poprzez x_i:

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = f^{-1}X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{8} & \frac{7}{8} & -\frac{1}{16} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}x_3 \\ -\frac{1}{8}x_1 + \frac{7}{8}x_2 - \frac{1}{16}x_3 \\ \frac{1}{8}x_1 + \frac{1}{8}x_2 + \frac{1}{16}x_3 \end{pmatrix}$$

(e) Stosując (4):

$$m' = f^{-1}mf = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{8} & \frac{7}{8} & -\frac{1}{16} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{57}{2} \\ -\frac{91}{16} & \frac{11}{16} & \frac{387}{16} \\ -\frac{37}{16} & \frac{5}{16} & \frac{141}{16} \end{pmatrix}$$

8. Współrzędne u_i nowego układu wyrażają się wzorami $u_1 = x_2 - 2x_3, u_2 = x_1 - x_2 + x_3, u_3 = -2x_1 + x_2 - x_3$. Znajdź współrzędne wersorów układu $O_{u_1u_2u_3}$ w układzie $O_{x_1x_2x_3}$ oraz **macierz przejścia** ~~do układu $O_{u_1u_2u_3}$~~.

Rozwiązanie.

Możemy zapisać

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - 2x_3 \\ x_1 - x_2 + x_3 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Z (3) "odczytujemy", iż

$$f^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Zatem macierz przejścia:

$$f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -4 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Wersory:

$$F_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad F_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad F_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

9. Znajdź równanie płaszczyzny $-2x_1 + 5x_2 - x_3 = 7$ w układzie współrzędnych z poprzedniego zadania. Znajdź równanie w układzie $O_{x_1x_2x_3}$ płaszczyzny, która w układzie $O_{u_1u_2u_3}$ wyraża się równaniem $3u_1 - u_2 - u_3$.

Rozwiązanie.

Z poprzedniego zadania mamy $u_1 = x_2 - 2x_3, u_2 = x_1 - x_2 + x_3, u_3 = -2x_1 + x_2 - x_3$. Wstawiając to do $3u_1 - u_2 - 2u_3 - 1 = 0$ otrzymujemy

$$3(x_2 - 2x_3) - (x_1 - x_2 + x_3) - 2(-2x_1 + x_2 - x_3) - 1 = 0.$$

Upraszczając

$$2x_2 - 5x_3 + 3x_1 - 1 = 0.$$

Natomiast, by zapisać równanie płaszczyzny $-2x_1 + 5x_2 - x_3 = 7$ w nowym układzie, musimy najpierw wyrazić x_i poprzez współrzędne u_i. Wyliczywszy w poprzednim zadaniu f możemy, korzystając z (2), zapisać:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = fU = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -4 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_2 - u_3 \\ -u_1 - 4u_2 - 2u_3 \\ -u_1 - 2u_2 - u_3 \end{pmatrix}$$

Równanie płaszczyzny $-2x_1 + 5x_2 - x_3 = 7$ można zapisać:

$$-2(u_2 - u_3) + 5(-u_1 - 4u_2 - 2u_3) - (-u_1 - 2u_2 - u_3) = 7$$

Upraszczając:

$$4u_1 + 20u_2 + 7u_3 = -7$$

10. Uzasadnij, że przekształcenie liniowe $M : R^3 \to R^3$ zadane macierzą symetryczną m, przedstawia się także macierzą symetryczną m' w dowolnym innym kartezjańskim układzie współrzędnych $O_{u_1u_2u_3}$. Wskazówka: macierz przejścia do dowolnego innego kartezjańskiego układu jest macierzą ortogonalną.

Rozwiązanie

Niech F_1, F_2, F_3 będą wersorami w układzie $O_{u_1u_2u_3}$. Jeśli układ jest kartezjański, to $f^{-1} = f^T$. Z zadania wiemy także, że $m^T = m$. Macierz m' przekształcenia M w nowym układzie to - z (4)

$$m' = f^{-1}mf.$$

Chcemy pokazać, iż $m' = (m')^T$. Mamy

$$(m')^T = (f^{-1}mf)^T = (mf)^T(f^{-1})^T = f^T m^T (f^{-1})^T = f^{-1}m(f^T)^T = f^{-1}mf = m'.$$

11. Na płaszczyżnie dane są wektory $F_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $F_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$ oraz układ $O_{u_1 u_2}$, w którym wektory te są wersorami. Znajdź współrzędne $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = U$, w nowym układzie wektora X, który w starym układzie ma współrzędne $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5/2 \end{pmatrix}$. Zrob to następującymi sposobami:

(1) znajdując rozkład wektora X w kombinację liniową wersorów F_1, F_2,

(2) znajdując macierz przejścia oraz stosując wzór na nowe współrzędne (który w R^2 jest taki sam jak w R^3).

Rozwiązanie

(1) Chcemy znaleźć u_1, u_2 takie, by

$$X = u_1 F_1 + u_2 F_2,$$

czyli

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -5/2 \end{pmatrix} = u_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_1 + \frac{1}{2}u_2 \\ 2u_1 + u_2 \end{pmatrix}$$

Rozwiązując układ

$$\begin{cases} 2 & = & -u_1 + \frac{1}{2}u_2 \\ -5/2 & = & 2u_1 + u_2 \end{cases}$$

Otrzymujemy

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{13}{8} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

(2) Mamy

$$f = (F_1 \ F_2) = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Liczymy odwrotną

$$f^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

by użyć (3)

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = f^{-1}X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -5/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{13}{8} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$