Geometria elementarna
Lista 2. Miara Jordana

1. Przedyskutuj sensowność definicji pola wewnętrznego P_w, jeżeli nie zakładalibyśmy, że kwadraty w kolekcji $\mathcal{K}$ mają parami rozłączne wnętrza (pamiętaj, że $P(\mathcal{K})$ to suma pól kwadratów z $\mathcal{K}$).

2. Pokaż, że jeżeli $X \subset Y$ są mierzalne, to $P(X) \leqslant P(Y)$.

3. Pokaż z definicji, że następujące figury są mierzalne i oblicz ich pola:

   (a) Odcinek

   (b) Prostokąt o bokach a oraz b

   (c) Trójkąt o podstawie a i wysokości h

   (d) Dywan Sierpińskiego.

   Uwaga: skorzystaj z tego, że pole jest addytywne oraz niezmiennicze na izometrie. Do przybliżeń wewnętrznych można skorzystać z pustej kolekcji kwadratów, której pole wynosi 0.

4. Pokaż z definicji, że następujące figury mają pole równe 0.

   (a) Zbiór wszystkich punktów postaci $(\frac{1}{n}, \frac{1}{m})$ gdzie $m, n \in \mathbf{N}$

   (b) $\bigcup_i^\infty [0,1] \times \{\frac{1}{n}\}$.

5. Czy suma przeliczalnie wielu zbiorów miary 0 jest miary 0?

6. Pokaż, że jeżeli $A_i \subset X$, $X \subset B_i$ są mierzalne oraz $\lim_{i\to\infty} P(A_i) = \lim_{i\to\infty} P(B_i)$ to X jest mierzalny oraz $P(X) = \lim_{i\to\infty} P(A_i)$.

7. Uzasadnij, że jeżeli X jest mierzalny a X' jest podobny do X w skali k, to X' jest mierzalny oraz $P(X') = k^2 P(X)$.

8. Uzasadnij, że suma i przekrój dwóch zbiorów mierzalnych jest mierzalna/y (możesz skorzystać z tego, że suma, przekrój, różnica - z dokładnością do brzegu - dwóch figur wielokątnych jest figurą wielokątną).

9. Pokaż, że dla dowolnych dwóch zbiorów mierzalnych A,B zachodzi wzór:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

10. Oblicz pole koła o promieniu R.

11. Oblicz pole wycinka koła, tzn. (dowolnej) części koła która powstaje z przecięcia wzdłuż cięciwy o długości d. We wzorze mogą pojawić się funkcje odwrotne do trygonometrycznych.