Geometria elementarna
Lista 3. Pole powierzchni

1. Na płaszczyźnie xy dana jest łamana $A_0A_1 \dots A_n$, przy czym punkt A_i ma współrzędne $(i, y_i), y_i > 0$. Oblicz pole powierzchni obrotowej otrzymanej przez obrót tej łamanej wokół osi x.

2. Z kwadratu utworzono dwie bryły obrotowe obracając go wokół prostej przechodzącej przez

   (a) środki przeciwległych boków

   (b) dwa przeciwlegle wierzchołki.

   Która z tych brył ma mniejsze pole powierzchni? Jaka będzie odpowiedź na analogiczne pytanie dla sześciokąta foremnego?

3. Kwadrat o boku $2a$ umieszczono na płaszczyźnie w ten sposób, że jego środek znajduje się w odległości $d > a\sqrt{2}$ od osi y, a następnie utworzono bryłę obrotową B obracając ten kwadrat wokół osi y.

   (a) Wylicz pole powierzchni bryły B w przypadku, gdy boki kwadratu są równoległe i prostopadle do osi y, oraz w przypadku gdy boki te są nachylone pod kątem $\frac{\pi}{4}$ do osi y.

   (b) Uzasadnij, że pole powierzchni bryły B jest niezależne od kąta nachylenia boków kwadratu do osi y.

4. Sformułuj i uzasadnij uogólnienie własności z punktu (b) poprzedniego zadania dla przypadków gdy kwadrat jest zastąpiony przez:

   (a) dowolny prostokąt

   (b) dowolny wielokąt foremny.

5. Oblicz pole plasterka sfery przybliżając je stożkami ściętymi.

6. Rozważmy czaszę kulistą C która jest przekrojem sfery S i kuli o promieniu l i środku leżącym na S. Pokaż, że $P(C) = \pi l^2$ ($l \leqslant$ promień S). W szczególności $P(C)$ nie zależy od promienia S.

7. Figurę płaską będącą sumą dwóch kół o promieniu r i o środkach odległych o r obrócono w przestrzeni wokół prostej przechodzącej przez środki obu tych kół. Oblicz pole powierzchni tak utworzonej bryły obrotowej.

8. Dla danej sfery S o promieniu r znajdź:

   (a) stożek wpisany w S o maksymalnym polu powierzchni całkowitej

   (b) stożek opisany na S o najmniejszym polu powierzchni całkowitej.

9. Na płaszczyźnie dana jest prosta L, punkt O w odległości d od tej prostej, oraz koło K o promieniu $r < d$ i środku O. Oblicz pole powierzchni bryły obrotowej (zwanej torusem) powstałej przez obrót koła K w przestrzeni, wokół prostej L. Wskazówka: rozważ $2n$-kąty foremne opisane na kole K o dwóch bokach prostopadłych do L.

10. Koło K z poprzedniego zadania podzielono na dwa półkola prostą równoległą do L. Półkole bliższe L nazwano P_1, zaś półkole dalsze P_2. Powierzchnie Σ_1 utworzono przez obrót P_1 wokół L, zaś powierzchnie Σ_2 analogicznie przez obrót P_2. Oblicz pola powierzchni Σ_1 i Σ_2.

11. Obejrzyj film produkcji 3Blue1Brown pod tytułem "But why is a sphere's surface area four times its shadow?".

    (a) Wytłumacz uwagę z 8:15 dotyczącą obracania kwadracików o $\frac{\pi}{2}$ i składania z nich cylindra.

    (b) Rozwiąż serię zadań z bloku 'The second proof' (11:20-15:15) i przedstaw całe rozumowanie.