

## 6 Lista 6

W dalszych zadaniach tej listy i następnych będziemy korzystali z następujących przykładowych rozkładów.

- [1] Modelujemy przyszły czas życia osoby nowourodzonej rozkładem z dystrybuantą

$$F_1(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 0.01x, & 0 \leq x < 100, \\ 1, & x \geq 100. \end{cases}$$

- [2] Modelujemy kwotę odszkodowania płaconą w dolarach za szkodę samochodową rozkładem z dystrybuantą

$$F_2(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - \left(\frac{2000}{x+2000}\right)^3, & x \geq 0. \end{cases}$$

- [3] Modelujemy liczbę szkód na polisę w jednym roku rozkładem z dystrybuantą

$$F_3(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 0.5, & 0 \leq x < 1, \\ 0.75, & 1 \leq x < 2, \\ 0.87, & 2 \leq x < 3, \\ 0.95, & 3 \leq x < 4, \\ 1, & x \geq 4. \end{cases}$$

- [4] Modelujemy wielkość odszkodowania za błędy lekarskie rozkładem z dystrybuantą

$$F_4(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - 0.3e^{-0.00001x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

- [5] Alternatywny model przyszłego czasu życia z [1]. Funkcja przeżycia jest dana wzorem

$$S_5(x) = \begin{cases} 1 - 0.01x, & 0 \leq x < 50, \\ 1.5 - 0.02x, & 50 \leq x < 75. \end{cases}$$

- 6.1 Rozpatrzmy ryzyko  $X$  z dystrybuantą zadaną odpowiednio powyżej. Podaj funkcję gęstości (lub funkcję prawdopodobieństwa) dla rozkładów z modeli:

- (i) [1], [2]
- (ii) [5]
- (iii) [3], co można powiedzieć o  $F_4$ ?

## 6.2 Oblicz średnią i odchylenie standardowe dla rozkładów z modeli

- (i) [1];
- (ii) [2];
- (iii) [3];
- (iv) [4];
- (v) [5].

Wsk. Dla  $F_1$  można rozważyć najpierw zmienną losową  $Y$  o rozkładzie jednostajnym  $\mathcal{U}(0, 1)$ . Zastanów się jak z tego skorzystać przy liczeniu odpowiednich charakterystyk  $X$  z dystrybucją  $F_1$ .

## 6.3 Oblicz skośność i kurtozę dla rozkładów z modeli

- (i) [1];
- (ii) [2];
- (iii) [3];
- (iv) [4];
- (v) [5].

Wsk. Dla  $F_1$  można rozważyć najpierw zmienną losową  $Y$  o rozkładzie jednostajnym  $\mathcal{U}(0, 1)$ . Zastanów się jak z tego skorzystać przy liczeniu odpowiednich charakterystyk  $X$  z dystrybucją  $F_1$ .

6.4 Próba prosta rozmiaru 10 składa się z dwóch szkód w wysokości 400, siedmiu szkód w wysokości 800 oraz jednej w wysokości 1600. Na tej podstawie oszacuj empiryczną skośność pojedynczej szkody.

6.5 Wielkości szkód wynoszą 100, 200, 300, 400, 500 odpowiednio z prawdopodobieństwami: 0.05, 0.20, 0.50, 0.20 i 0.05. Oblicz skośność i kurtozę.

6.6 Dla modelu [2] oblicz  $\pi_{0.5}$  oraz  $\pi_{0.8}$ .

- 6.7 Dla dystrybuanty  $F(x) = 1 - x^{-2}$ ,  $x \geq 1$  oblicz wielkość modalną, średnią i medianę.
- 6.8 Z próby 1000 polis zdrowotnych oszacowano, że średnia rocznych korzyści wypłaconych z polisy wynosi 1300 z odchyleniem standardowym 400. Na następny rok spodziewane jest, że zostanie podpisanych 2500 kontraktów. Przy użyciu centralnego twierdzenia granicznego oszacuj prawdopodobieństwo, że wypłacone korzyści będą większe niż 101% oszacowanej średniej.

### Zadania teoretyczne.

- 6.9 Wielkość szkody pożarowej zależy od czasu  $T = t$  trwania pożaru, i wyraża się wzorem  $b(e^{at} - 1)$ . Pokaż, że jeśli  $T$  ma rozkład wykładniczy, to wielkość szkody ma rozkład Pareto. Podaj parametry tego rozkładu.
- 6.10 Szkoła ma rozkład Pareto( $\frac{\beta}{\alpha}, \alpha$ ). Jaki jest graniczny rozkład wielkości szkody gdy  $\alpha \rightarrow 0$ ?
- 6.11 Ryzyko  $X$  ma rozkład Pareto( $\alpha, \theta$ ). Jaki rozkład ma ryzyko  $Y$  gdy

$$Y = \log(1 + X/\theta).$$

- 6.12 Niech ryzyko  $N$  (np. liczba wypadków w roku) ma rozkład Poissona ze średnią  $\Lambda$ , która jest losowa. Jeśli  $\Lambda$  ma rozkład jednostajny w odcinku  $(a, b)$ , to ile wynosi prawdopodobieństwo, że  $N \geq t$ .
- 6.13 \* Rozpatrzć logarytm funkcji generującej momenty  $M_X(t) = E e^{tX}$ . Kolejne pochodne w zerze wyznaczają tzw. kumulanty zmiennej losowej  $X$ ; pierwsza kumulanta jest średnią, druga jest wariancją a trzecia jest 3-cim momentem centralnym. Korzystając z tego wyznacz średnią, odchylenie standardowe, współczynnik zmienności, skośność rozkładu gamma.
- 6.14 \* Niech  $X_1, \dots, X_n$  będą niezależnymi szkodami o jednakowym rozkładzie, mające 4-ty moment. Niech  $A = \sum_{j=1}^n X_j$ . Oblicz średnią, odchylenie standardowe, współczynnik zmienności, skośność oraz kurtozę  $A$ .