

1 Lista 1. Analiza przeżycia

Niech T_x będzie zmienną losową opisującą przyszły czas życia x -latka.

- 1.1 Udowodnij, że ${}_u|_tq_x = s_x(u) - s_x(u+t) = {}_{t+u}q_x - {}_uq_x$.
- 1.2 Udowodnij, że ${}_u|_tq_x = {}_up_x \cdot {}_tq_{x+u}$.
- 1.3 Udowodnij, że $\int_0^\infty {}_tp_x \mu_{x+t} dt = 1$.
- 1.4 Udowodnij, że ${}^\circ e_x = \int_0^\infty {}_tp_x dt$.
- 1.5 Udowodnij, że ${}_kp_x = p_x \cdot \dots \cdot p_{x+k-1}$ dla $k = 1, 2, \dots$

Niech T_0 będzie zmienną losową o rozkładzie wykładniczym z parametrem λ , opisującą przyszły czas życia 0-latka. Korzystając z tego założenia rozwiąż zadania 1.6 – 1.9.

- 1.6 Oblicz ${}_tq_x$, $t, x \geq 0$. Jaki rozkład ma zmienna losowa T_x ?
- 1.7 Oblicz
 - (i) ${}_u|_tq_x$;
 - (ii) ${}^\circ e_x$;
 - (iii) μ_x (Podaj interpretację otrzymanego wyniku. Czy implikacja w drugą stronę jest prawdziwa? *).
- 1.8 Używając oznaczeń aktuarialnych oraz przyjmując, że $\lambda = 0.02$, znajdź prawdopodobieństwo, że 20-latek
 - (i) umrze nie później niż w 50 roku życia,
 - (ii) dożyje 70 lat,
 - (iii) umrze między 30 a 40 rokiem życia;
 - (iv) przeżyje 30 lat a następnie umrze w ciągu kolejnych 40 lat.
- 1.9 Przyjmując $\lambda = 0.02$ oblicz średni przyszły czas życia 20, 30, 40 i 100-latka oraz prawdopodobieństwo, że 20-latek przeżyje 10 lat, że 30-latek przeżyje 10 lat, że 40-latek przeżyje 10 lat, że 100-latek przeżyje 10 lat.

Jaka matematyczna własność rozkładu wykładniczego odpowiada za uzyskane tutaj wyniki? Czy rozkład wykładniczy jest dobrym modelem przyszłego czasu życia?

1.10 Załóżmy, że T_0 spełnia prawo de Moivre'a z parametrem ω udowodnij, że T_x ma rozkład jednostajny na odcinku $[0, \omega - x]$. Czy prawo de Moivre'a jest dobrym modelem przyszłego czasu życia (albo przynajmniej lepszym od rozkładu wykładniczego)?

1.11 Przy założeniu prawa de Moivre'a z parametrem $\omega = 100$ znajdź (wykonując obliczenia lub odpowiedni rysunek):

(i) ${}_{30}p_{20}$;

(ii) ${}_{30|10}q_{40}$;

1.12 Przy założeniu prawa de Moivre'a wyznacz:

(i) μ_{x+t} ;

(ii) $\dot{e}_x$.

1.13 Przy założeniu prawa Gompertza ($\mu_t = Bc^t, B > 0, c > 1$) pokaż, że $s(t) = \exp\{-m(c^t - 1)\}$, gdzie $m = \frac{B}{\log c}$ oraz wyprowadź wzór na ${}_tp_x$.

1.14 Oblicz ${}_{40}p_{20}$ zakładając, że rozkład trwania życia osoby nowo urodzonej podlega prawu

(i) de Moivre'a z parametrem $\omega = 100$;

(ii) Gompertza z parametrami $B = 0.00026155$ i $c = 1.07826$;

(iii) Za tydzień porównaj wyniki z odpowiednim zadaniem na liście 2.

1.15 Przy założeniu prawa Makehama ($\mu_t = A + Bc^t, B > 0, A \geq -B, c > 1$) pokaż, że $s(t) = \exp\{-At - m(c^t - 1)\}$, gdzie $m = \frac{B}{\log c}$ oraz wyprowadź wzór na ${}_tp_x$.

1.16 Oblicz $\dot{e}_{20}$ jeśli wiadomo że $\mu_{20+t} = t$.

1.17 * Niech T_x będzie przyszłym czasem życia x -latka. Załóżmy, że

$$P(T_0 > t) = \left(1 - \frac{t}{100}\right)^\alpha, \quad 0 \leq t \leq 100, \quad \alpha > 0.$$

- (i) Zakładając, że $\alpha = 1$, znajdź wartość oczekiwaną przyszłego czasu życia 20-latka.
- (ii) Znajdź α jeśli wiadomo, że prawdopodobieństwo, że 20-latek przeżyje jeszcze 10 lat a następnie umrze w ciągu kolejnych 10 lat wynosi 0.125.

1.18 * Załóżmy, że funkcja przeżycia wyraża się wzorem

$$s(x) = 1 - \frac{x}{110}$$

dla $x \in [0, 110]$. Przyjmując, że przyszłe czasy życia są niezależne oblicz prawdopodobieństwo, że w grupie 2 osób w wieku 20 lat

- (i) przynajmniej jedna umrze w ciągu następnego roku;
- (ii) obydwie umrą w ciągu następnego roku;
- (iii) obydwie przeżyją następny rok;
- (iv) przynajmniej jedna przeżyje następny rok.

1.19 * Oblicz p_{60} , zakładając, że natężenie śmiertelności jest stałe dla $x \geq 50$ oraz $e_{50} = 40$.

1.20 *[EdA16.11.96] W populacji A natężenie zgonów dane jest wzorem

$$\mu_x^A = \frac{1}{100 - x} \quad \text{dla } x < 100,$$

a w populacji B wzorem

$$\mu_x^B = \frac{n}{100 - x} \quad \text{dla } x < 100,$$

gdzie n jest parametrem. Wiadomo ponadto, że osobniki z populacji A mają przed sobą przeciętnie o 10% dłuższy czas życia, niż osobniki z B w tym samym wieku. [Odp. (A) $n = 1.1$, (B) $n = 1.15$, (C) $n = 1.2$, (D) $n = 1.21$, (E) żadna z powyższych.]

2 Lista 2: Analiza przeżycia, c.d.

TTŻ-PL2018k oznacza polskie tablice trwania życia kobiet z 2018 roku. Podobnie np. TTŻ-PL97m oznacza tablice z 1997 roku dla mężczyzn. Tablice dostępne są na stronach GUSu.

2.1 Zakładając, że przyszły czas życia opisywany jest przez TTŻ-PL2018k oblicz prawdopodobieństwo, że 20-latka

- (i) umrze nie później niż w 50 roku życia,
- (ii) dożyje 70 lat,
- (iii) umrze między 30 a 40 rokiem życia;
- (iv) przeżyje 30 lat a następnie umrze w ciągu kolejnych 40 lat.

2.2 Pokaż, że

$$e_x = \sum_{k=1}^{\infty} {}_k p_x = \frac{1}{l_x} \sum_{k=1}^{\infty} l_{x+k}.$$

2.3 Osobno dla TTŻ-PL97k, TTŻ-PL97m, TTŻ-2018k oraz TTŻ-2018m oblicz (oraz porównaj i zinterpretuj wyniki)

- (i) ${}_{20}p_{40}$ (dodatkowo porównaj z odpowiednimi zadaniami z poprzedniej listy);
- (ii) ${}_{40}p_{40}$;
- (iii)^R e_{40} .

2.4^R Znajdź parametry B, c , które najlepiej dopasowują prawo Gompertza do TTŻ-PL2018m.

2.5 Oblicz ${}_{40}p_{25}, {}_{10}q_{55}, {}_{10|10}q_{55}$ zakładając, że rozkład trwania życia osoby nowo urodzonej podlega prawu de Moivre'a z parametrem $\omega = 85$. Oblicz powyższe prawdopodobieństwa korzystając z tablic trwania życia Halleya. Jak zinterpretujesz otrzymane wyniki? Czy podobne wyniki otrzymasz korzystając ze współczesnych tablic np. TTŻ-PL2018m?

2.6 Niech $0 \leq u < 1$. Udowodnij, że

$$(\forall x, n \in \mathbb{N}) [{}_u q_x = {}_u q_x] \Leftrightarrow [{}_{n+u} p_x = (1-u) {}_n p_x + u {}_{n+1} p_x].$$

2.7 Przy założeniu hipotezy HU udowodnij, że $\mathbb{E}T_x = \mathbb{E}K_x + \frac{1}{2}$ oraz $\mathbb{V}ar(T_x) = \mathbb{V}ar(K_x) + \frac{1}{12}$.

2.8 Zakładając, że zachodzi hipoteza jednostajności oraz przyszły czas życia osoby nowourodzonej opisywany jest przez TTŻ-PL2018m oblicz

- (i) $\mathbb{P}(T_{40} > 10.25)$;
- (ii) ${}_{0.5}p_{21}$;
- (iii) ${}_{15|1.5}q_{35}$;
- (iv) ${}_{15.5|13}q_{30}$;
- (v) $p_{25.5}$;
- (vi) prawdopodobieństwo, że 25.5-latek umrze pomiędzy 55.25 i 60.75 rokiem życia.

2.9 Na podstawie tabelki i przy założeniu HU oblicz ${}_4p_{25}$ i ${}_{5.75}p_{24}$

x	q_x
24	0.00133
25	0.00132
26	0.00131
27	0.00130
28	0.00130
29	0.00131
30	0.00133

2.10 ^R Oszacuj e_0 jeśli czas życia jest opisany przez TTŻ Halley'a. Jaki jest możliwy błąd spowodowany urwaniem się tablic na $x = 83$, jeśli przyjmujemy, że $\omega = 100$?

2.11 Załóżmy, że zachodzi hipoteza jednostajności. Ponadto wiadomo, że $p_{40} = 0.9$ oraz $p_{41} = 0.8$. Oblicz $p_{40.5}$. Wynik podaj z dokładnością do trzech miejsc dziesiętnych.

2.12 * Załóżmy, że spełniona jest hipoteza jednostajności. Oblicz p_{80} jeśli wiadomo, że

$${}_3p_{80} = 0.7, \quad {}_2p_{80.5} = 0.79, \quad p_{81} = 0.89.$$

- 2.13 * Znajdź p_{40} przy założeniu, że oczekiwane dalsze trwanie życia 40-latka wynosi $e_{40} = 28.5$ roku natomiast $e_{41} = 27.7$ roku.
- 2.14 Posiłkując się poprzednim zadaniem znajdź wzór opisujący zależność między p_x , e_x i e_{x+1} oraz podaj jego interpretację.
- 2.15 * Zdefiniujmy

$$S_x^{(m)} = \frac{1}{m} \lfloor mS_x + 1 \rfloor, \quad (2.1)$$

czyli zaokrąglenie S do najmniejszej większej wielokrotności $1/m$. Zmienna $S^{(m)}$ przyjmuje zatem wartości $1/m, 2/m, \dots, 1$. Wykonaj odpowiedni rysunek obrazujący zależność między S_x i $S_x^{(m)}$. Pokaż, że przy założeniu HU $S_x^{(m)}$ ma dyskretny jednostajny rozkład

$$\Pr(S_x^{(m)} = k/m) = 1/m \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (2.2)$$

oraz że zmienne K_x i $S_x^{(m)}$ są niezależne.

- 2.16 * Wprowadza się *centralne natężenie śmiertelności* lub *roczny współczynnik natężenia zgonów dla wieku x* wzorem

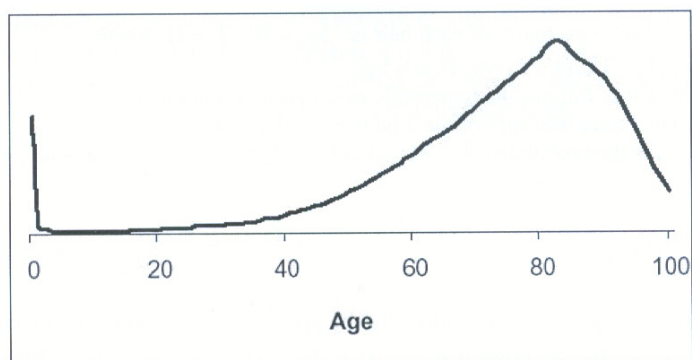
$$m_x = \frac{\int_0^1 l_{x+t} \mu_{x+t} dt}{\int_0^1 l_{x+t} dt} = \frac{d_x}{L_x},$$

gdzie $L_x = \int_0^1 l_{x+t} dt$. Udowodnij, że przy HU

$$m_x = \frac{q_x}{1 - q_x/2}.$$

- 2.17 *[SAE05.2001/14]¹ Wykres na rys. 2.17 jest związany z ludzką śmiertelnością. Którą z następujących funkcji od wieku x najprawdopodobniej prezentuje ? (A) μ_x , (B) $l_x \mu_x$, (C) $l_x p_x$, (D) l_x , (E) l_x^2 .

¹SAE oznacza zadanie egzaminacyjne Society of Actuaries; 05.2001 oznacza datę natomiast 14 numer zadania.



Rysunek 2.1:

3 Lista 3: Teoria procentu składanego

- 3.1 Załóżmy, że w j -tym roku ($j = 1, 2, \dots, n$) efektywna stopa procentowa wynosi i_j . Podaj wzór opisujący zależność między k_0 - wartością kapitału w chwili 0 a k_n - wartością kapitału w chwili n .
- 3.2 Znajdź stopę procentową i , dla której poniższy przepływ pieniądza spełnia warunek równoważności:
 na początku roku 1 wpłata w wysokości 100,
 na początku roku 2 wpłata w wysokości 100,
 na początku roku 3 wypłata w wysokości 231. Jaka jest bieżąca wartość tego przepływu w połowie 2 roku gdy obowiązującą stopą procentową jest i ?
- 3.3 Rozważmy przepływ pieniądza $C_0 = C_1 = \dots = C_n = 7$. Podaj wzór na
- (i) obecną wartość tego przepływu;
 - (ii) zakumulowaną wartość na chwilę n .
- 3.4 Pokaż (najlepiej wykonując odpowiednie rysunki), że
- (i) $a_{\overline{n+k}|} = a_{\overline{k}|} + v^k a_{\overline{n}|} = v^n a_{\overline{k}|} + a_{\overline{n}|}$;
 - (ii) ${}_k|a_{\overline{n}|} = v^k a_{\overline{n}|} = a_{\overline{n+k}|} - a_{\overline{k}|}$;
 - (iii) $\ddot{a}_{\overline{n}|} + v^n = a_{\overline{n}|} + 1$.
- 3.5 Niech P będzie wartością obecną 5 letniej renty, której płatność w chwili t wynosi $4t^3$. Wyznacz P jeśli natężenie oprocentowania (δ) w chwili t wynosi $5t^4$.
- 3.6 Załóżmy, że począwszy od początku 5 roku do pewnego funduszu wpłacane jest 1000 zł i wypłacane 500 zł naprzemiennie co rok.
- (i) Jak opisać obecną wartość przepływu w języku rent? Jaka jest obecna wartość opisanego przepływu przy założeniu że znamy czynnik dyskonta v ?
 - (ii) Jaka jest wartość opisanego przepływu w chwili 15 przy założeniu że znamy czynnik dyskonta v ?

3.7 Z tytułu renty bezterminowej dokonywane są płatności w wysokości 2^{-k} na koniec k -tego roku ($k = 1, 2, \dots$). Dla czynnika dyskonta $v = \frac{3}{4}$ oblicz obecną wartość tej renty.

3.8 Rozważmy strumień pieniądza $C_n = 5n + 1$ w kolejnych latach $n = 0, 1, 2, \dots$. Zakładając, że czynnik dyskonta wynosi $v = 0.9$, oblicz obecną wartość tego przepływu.

3.9 Pokaż (najlepiej wykonując odpowiednie rysunki), że

$$(I\ddot{a})_{\overline{n}} + (D\ddot{a})_{\overline{n}} = (n + 1)\ddot{a}_{\overline{n}},$$

gdzie $(I\ddot{a})_{\overline{n}}$ oznacza obecną wartość n -letniej renty rosnącej z góry czyli wypłacającej na początku kolejnych lat odpowiednio $1, 2, 3, \dots$, natomiast $(D\ddot{a})_{\overline{n}}$ oznacza obecną wartość n -letniej renty malejącej z góry wypłacającej na początku kolejnych lat odpowiednio $n, n - 1, \dots$.

3.10 Rozważmy dwa fundusze - A i B. Do funduszu A dokonujemy wpłat z góry, przez 10 lat, systematycznie 6 razy w roku. Wpłaty rosną co pół roku czyli pierwsze 3 wpłaty wynoszą 1000 PLN, kolejne 3 wpłaty wynoszą 2000 PLN, kolejne 3 wpłaty są w wysokości 3000 PLN itd.

Do funduszu B również dokonujemy wpłat z góry przez 10 lat systematycznie 6 razy w roku ale wpłaty maleją 2 razy w roku - co pół roku. Pierwsze 3 wpłaty wynoszą 20000 PLN, kolejne 3 to 19000 PLN, kolejne 3 to 18000 PLN itd.

Przyjmując, że roczna nominalna stopa procentowa wynosi $i^{(6)} = 0.06$ oblicz

- (i) obecną wartość *łącznego* przepływu pieniężnego wpłat do funduszy A i B,
- (ii) bieżącą wartość *łącznego* przepływu pieniężnego wpłat do funduszy A i B na koniec drugiego roku.

4 Lista 4: Ubezpieczenia życiowe

- 4.1 Oblicz $\bar{A}_{60}$ jeśli wiadomo, że przyszły czas życia 60-latka jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym ze średnią 20 oraz $v = 0.95$.
- 4.2 Oblicz $\bar{A}_{60}$, przy założeniu, że przyszły czas życia 60-latka T_{60} ma rozkład jednostajny ze średnią 20 oraz $v = 0.95$.
- 4.3 Załóżmy, że funkcja przeżycia wyraża się wzorem

$$s(x) = 1 - \frac{x}{110}$$

dla $x \in [0, 110]$. Wyznacz jednorazową składkę netto czystego ubezpieczenia na dożycie na 5 lat dla osoby w wieku 20 lat. Do obliczeń przyjmij stopę procentową 0%.

- 4.4 Oblicz wariancję obecnej wartości czystego ubezpieczenia na dożycie.
- 4.5 Uzasadnij (najlepiej wykonując odpowiednie rysunki), że

- (i) $A_x = vq_x + vA_{x+1}p_x$;
 (ii)* $(IA)_x = vq_x + vp_x(A_{x+1} + (IA)_{x+1})$;
 (iii)* $(DA)_{1 \over x:\overline{n}|} = (n+1)A_{1 \over x:\overline{n}|} - (IA)_{1 \over x:\overline{n}|}$,

gdzie $(IA)_x$ jest obecną wartością aktuarialną rosnącego ubezpieczenia dla x - latka wypłacającego k w przypadku śmierci w k - tym roku trwania ubezpieczenia. Podobnie $(DA)_{1 \over x:\overline{n}|}$ jest obecną wartością aktuarialną n - letniego ubezpieczenia malejącego dla x - latka wypłacającego $n - k + 1$ w przypadku śmierci w k - tym roku trwania ubezpieczenia.

- 4.6 Korzystając z TTŻ-PL97k oraz wiedząc, że $A_{1 \over 40:\overline{4}|} = 0.9$ oblicz efektywną stopę procentową.
- 4.7 Korzystając z TTŻ-PL2018m oraz zakładając, że $v = 0.95$ oblicz drugi moment obecnej wartości ubezpieczenia terminowego na 3 lata dla 67-latka na sumę ubezpieczenia 100.
- 4.8 ^R Oblicz $1000A_{1 \over 40:\overline{25}|}$. Do obliczeń przyjmij $i = 5\%$ oraz skorzystaj z TTŻ-PL97k, TTŻ-PL97m, TTŻ-PL2018k, TTŻ-PL2018m. Porównaj i zinterpretuj otrzymane wyniki.

- 4.9 Oblicz $1000A_{\overline{40}|1}$ oraz $1000A_{\overline{40}|1}$. Do obliczeń przyjmij $i = 5\%$ oraz skorzystaj z TTŻ-PL97k, TTŻ-PL97m, TTŻ-PL2018k, TTŻ-PL2018m. Podobne obliczenia wykonaj dla analogicznych ubezpieczeń dla 90 - latków. Porównaj i zinterpretuj otrzymane wyniki.
- 4.10 Oblicz wariancję obecnej wartości jednorocznego ubezpieczenia na życie i dożycie 40-latka z sumą ubezpieczenia 1000. Otrzymany wynik porównaj z rezultatem otrzymanym w poprzednim zadaniu oraz z sumą wariancji dla dwóch niezależnych ubezpieczeń - terminowego i na czyste dożycie. Podobną analizę przeprowadź dla analogicznego ubezpieczenia dla 90 - latków.
- 4.11 Oblicz obecną wartość aktuarialną 2000 do wypłacenia 40-latce po 30 latach korzystając z TTŻ-PL97k. Do obliczeń przyjmij techniczną stopę procentową $i = 3\%$.
- 4.12 Firma "X" ma w ofercie ubezpieczenie na życie na 2 lata wypłacające 1 na koniec roku śmierci. W celach marketingowych ubezpieczenie jest opłacone jedną składką P płatną na początku drugiego roku trwania ubezpieczenia. Zakładamy, że mamy dane TTŻ l_x , $x = 0, 1, \dots$ oraz czynnik dyskonta v .
- (i) Oblicz P .
 - (ii)* Przyjmując, że ubezpieczony może się w każdej chwili wycofać, zaproponuj strategię dla klienta, która pozwala taniej osiągnąć ten sam cel, czyli być ubezpieczonym przez 2 lata. Odpowiedź uzasadnij (matematycznie).
- 4.13 Portfel składa się ze 100 polis na całe życie dla 40 latków płatnych w chwili śmierci. Każda polisa jest wystawiona na sumę ubezpieczenia 1000 zł. Załóżmy, że czas trwania życia 40-latka jest jednostajny na odcinku $(0, 40)$ oraz mamy dane stałe natężenie stopy procentowej $\delta = \frac{1}{5}$. Jaką minimalną kwotę należy zainwestować w chwili 0 aby były możliwe wypłaty wszystkich polis z tego funduszu z prawdopodobieństwem 0,95? Wiadomo, że $\Phi(1.645) = 0.95$, gdzie $\Phi(\cdot)$ jest dystrybuantą rozkładu normalnego.
- 4.14 Portfel składa się z 1000 polis na życie dla 40-latków, z których każda wypłaca 1000 PLN na koniec roku śmierci. Jaki musi być zabezpieczony

fundusz w chwili $t = 0$ aby z prawdopodobieństwem 0.95 możliwe były wypłaty na koniec pierwszego roku. Do obliczeń przyjmij, że efektywna stopa procentowa $i = 0.05$, $l_{40} = 1000$, $l_{41} = 900$, $\Phi(1.645) = 0.95$, gdzie $\Phi(\cdot)$ jest dystrybuantą rozkładu normalnego.

- 4.15 Rozpatrujemy portfel 100 polis dla 30-latków na całe życie, płatnych w chwili śmierci. Każda polisa jest wystawiona na sumę ubezpieczenia 1000 PLN. Jaki musi być zabezpieczony fundusz w chwili 0, aby z prawdopodobieństwem 0.95 były możliwe wypłaty wszystkich polis? Do obliczeń przyjmij, że przyszłe czasy trwania życia 30-latków są niezależne, $\bar{A}_{30} = 0.8$, ${}^2\bar{A}_{30} = 1$ oraz $\Phi(1.645) = 0.95$, gdzie $\Phi(\cdot)$ jest dystrybuantą rozkładu normalnego.
- 4.16 Trzyletnie ubezpieczenie dla osoby w wieku x wypłaca 1000 zł jeśli śmierć nastąpi w pierwszym roku, 2000 zł jeśli śmierć nastąpi w drugim roku. Wypłaty dokonywane są na koniec roku śmierci. W przypadku dożycia do końca trwania ubezpieczenia wypłacana jest kwota 3000 zł. Wiadomo że

$$q_x = 0.2, \quad {}_1|q_x = 0.2, \quad {}_2|q_x = 0.3, \quad v = 0.9.$$

- (i) Napisz obecną wartość tego ubezpieczenia.
- (ii) Oblicz jednorazową składkę netto.
- 4.17 Rozpatrujemy ciągły model bezterminowego ubezpieczenia na życie ze składką P płatną jednorazowo w momencie zawierania umowy i sumą ubezpieczenia 1000€_{50} . Wyznacz P wiedząc, że ubezpieczony to osoba 50-letnia z populacji de Moivre'a z granicznym wiekiem $\omega = 110$ oraz natężenie oprocentowania $\delta = 0.05$
- 4.18 Oblicz jednorazową składkę netto ubezpieczenia na życie spełniającego następujące warunki:
- ubezpieczenie zostało zawarte na 5 lat przez osobę w wieku 30 lat;
 - świadczenie jest płatne w chwili śmierci ubezpieczonego;
 - w trakcie trwania ubezpieczenia jego suma rośnie jednostajnie wraz z upływem czasu od 0 PLN do 100 PLN.

Do obliczeń przyjmij, że natężenie oprocentowania oraz natężenie zgonów są stałe w rozpatrywanym okresie i przyjmują jednakową wartość równą 0.05.

- 4.19 * Kredyt ma być spłacany na początku roku w trzech równych ratach w wysokości $P = 10000$ zł. W celu zabezpieczenia kredytu zawierane jest ubezpieczenie na wypadek śmierci kredytobiorcy (60-latka). Świadczenie śmiertelne w wysokości pozostałego do spłaty długu jest wypłacane na koniec roku śmierci kredytobiorcy. Wyznacz ile procent z raty P stanowi stała składka tego ubezpieczenia. Do obliczeń przyjmij, że $v = 0.9, l_{60} = 1000, l_{61} = 800, l_{62} = 400$.

5 Lista 5; Ubezpieczenia i renty życiowe

- 5.1 Oblicz $\bar{a}_{20}$ jeśli wiadomo, że przyszły czas życia 0-latka jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym z parametrem 0.1 oraz natężenie oprocentowania równe jest 0.1.
- 5.2 Oblicz jednorazową składkę netto renty z dołu dla 30-latka na 3 lata w wysokości 3000. Obliczenia wykonaj dla TTŻ-PL97m oraz $i = 4\%$.
- 5.3 Oblicz JSN dla następującej renty dla 30-latka: jeśli żyje on pod koniec pierwszego roku wypłata wynosi 1000, jeśli żyje pod koniec drugiego roku wypłata wynosi 3000, jeśli żyje on pod koniec trzeciego roku wypłata wynosi 5000. Obliczenia wykonaj dla TTŻ-PL97m oraz $i = 4\%$. Porównaj z wynikiem zadania 5.2.
- 5.4 Podaj wzór na aktuarialną obecną wartość dla 30-latka dla następującego ubezpieczenia rentowego:
- 1000 na koniec każdego miesiąca w wieku 30 do 40 lat;
 - 2000 na koniec każdego miesiąca w wieku 40 do 50 lat;
 - 5000 na koniec każdego miesiąca w wieku 50 do 60 lat.
- 5.5 W zadaniu 5.4 podaj dokładny wynik dla TTŻ-PL97m oraz $i = 4\%$.
- 5.6 Zakładając HU, obliczyć $\bar{A}_{45}$, wiedząc, że $\ddot{a}_{45} = 19.864$ oraz $A_{45} = 0.42143$.
- 5.7 Pokaż, że $\bar{a}_{x:\overline{n}|}$ obliczone dla stałego natężenia śmiertelności μ i przy sile stopy procentowej δ jest równe $\bar{a}_{\overline{n}|}$ obliczone przy sile stopy procentowej $\delta + \mu$.
- 5.8 Załóżmy, że Y jest obecną wartością renty na całe życie wypłacającej 1 na rok dla x -latka. Dane jest $\ddot{a}_x = 10$ przy $i' = 1/24 = e^\delta - 1$, $\ddot{a}_x = 6$ przy $i = e^{2\delta} - 1$. Oblicz wariancję Y .
- 5.9 Uzasadnij (najlepiej wykonując odpowiednie rysunki), że
- (i) $a_{x:\overline{n}|} = \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - 1 + A_{x:\overline{n}|}^1$;
 - (ii) $\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 1 + a_{x:\overline{n-1}|}$;
 - (iii) $a_{x:\overline{n}|} = v\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - A_{x:\overline{n}|}^1$;

$$(iv) \ a_{x:\overline{n-1}|} = v\ddot{a}_{x:\overline{n}} - A_{x:\overline{n}}.$$

5.10 Zakładając HU, oblicz $\bar{A}_{45}$, wiedząc, że $\ddot{a}_{45} = 19.864$ oraz $A_{45} = 0.42143$.

5.11 Niech Y będzie obecną wartością renty dożywotniej dla 70-latka, gwarantującej mu wypłatę 100 na początku każdego roku. Oblicz $\text{Var}(Y)$ jeśli wiadomo, że

$$A_{69} = 0.55211, \quad {}^2A_{69} = 0.34022, \quad p_{69} = 0.97, \quad v = 0.95.$$

5.12 Oblicz $\bar{P}_x$, jeśli T_0 ma rozkład wykładniczy z gęstością $(1/100)e^{-x/100}$, $x \geq 0$ oraz $x = 40$ i $\delta = 3\%$.

5.13 40-latek kupuje dwuletnie ubezpieczenia na życie płatne na koniec roku śmierci. Przy zawarciu umowy płaci Π , a jeśli przeżyje pierwszy rok płaci $\Pi/2$. Zakładając, że składka jest netto, oblicz Π , wiedząc, że: przyszły czas życia ma rozkład de Moivre'a z $\omega = 100$ oraz $i = 4\%$.

5.14 Udowodnij, że

$$\bar{P}(\bar{A}_x) = \frac{\delta \bar{A}_x}{1 - \bar{A}_x}.$$

5.15 * W przypadku jednostkowej polisy na całe życie opłacanej składką o stałej intensywności (powiedzmy $\bar{\Pi}$), całkowita strata ubezpieczyciela gdy ubezpieczony umrze w chwili t wynosi $L(t) = v^t - \bar{\Pi}\bar{a}_{\bar{t}|}$. Wykaż, że $L(0) = 1$ oraz $L(t)$ jest funkcją malejącą i $\lim_{t \rightarrow \infty} L(t) = -\bar{\Pi}/\delta$. Wywnioskuj stąd, że istnieje dokładnie jeden moment t_0 , taki, że całkowita strata ubezpieczyciela wynosi 0. Z jakiego twierdzenia z analizy matematycznej korzystasz?

5.16 Sześćdziesięciolatek podpisuje umowę ubezpieczeniową w ramach, której za rok powinien wpłacić sumę x po czym od razu zacznie otrzymywać dożywotnią rentę wypłacaną ze stałą intensywnością 1000. Oblicz x zakładając, że przyszły czas życia sześćdziesięciolatka ma rozkład wykładniczym z parametrem $\frac{1}{90}$ oraz, że natężenie oprocentowania wynosi $\frac{1}{10}$.

5.17 Niech T_{20} będzie zmienną losową o rozkładzie wykładniczym z parametrem 0.02 opisującą przyszły czas życia dwudziestolatka podpisującego

umowę ubezpieczeniową, w której składki płacone są ze stałą intensywnością i która gwarantuje wypłatę kwoty 1000 w chwili śmierci ubezpieczonego. Zakładając stałą intensywność oprocentowania w czasie trwania ubezpieczenia oraz że zachodzi warunek równoważności. Oblicz intensywność płaconych składek.

- 5.18 Rozpatrzmy następujący produkt ubezpieczeniowy dla 20-latka - jeśli umrze on w pierwszym roku trwania umowy to wypłata wynosi 1000 PLN, jeśli żyje na koniec drugiego roku to wypłata wynosi 2000 PLN. Ubezpieczony płaci składki w wysokości x PLN na początku pierwszego roku oraz $2x$ PLN na początku drugiego roku. Znajdź x . Do obliczeń przyjmij, że efektywna stopa procentowa w pierwszym roku wynosi $i_1 = 60\%$ natomiast w drugim roku wynosi $i_2 = 25\%$ ponadto $l_{20} = 1000, l_{21} = 800, l_{22} = 400$.

- 5.19 Rozpatrzmy następującą rentę dla 30-latka - jeśli żyje on na koniec pierwszego roku to wypłata wynosi 1000 PLN, jeśli żyje na koniec drugiego roku to wypłata wynosi 2000 PLN. Dla renty tej oblicz

- (i) jej obecną wartość aktuarialną (jednorazową składkę netto),
- (ii)* jej zakumulowaną wartość aktuarialną na koniec drugiego roku.

Do obliczeń przyjmij, że efektywna stopa procentowa wynosi $i = 50\%$ oraz $l_{30} = 1000, l_{31} = 900, l_{32} = 810$.

- 5.20 * Sześćdziesięciolatek wpłaca w dniu urodzin 1000 PLN do funduszu ubezpieczeniowego. Następnej wpłaty w wysokości 2000 PLN planuje dokonać w dniu sześćdziesiątych pierwszych urodzin. Jeśli skończy sześćdziesiąt dwa lata zostanie mu wypłacona zakumulowana wartość aktuarialna opisanej powyżej renty. Znajdź tę wartość. Do obliczeń przyjmij, że

$$p_{60} = 0.75, \quad p_{61} = 0.4, \quad i = 0.2,$$

gdzie i jest efektywną stopą procentową.