

7 Lista 7

7.1 Zmienna losowa Y ma rozkład będący mieszkanką dwóch rozkładów: z prawdopodobieństwem p mamy rozkład dwumianowych z $m = 2$, $q = 0.5$ i z prawdopodobieństwem $1 - p$ rozkład dwumianowych z $m = 4$, $q = 0.5$. Podaj jako funkcję p prawdopodobieństwo, że zmienna losowa Y przyjmuje wartość 2.

7.2 Niech $Y \stackrel{d}{=} aX + b$. Znajdź związek pomiędzy $\text{VaR}_\alpha(Y)$ i $\text{VaR}_\alpha(X)$ oraz pomiędzy $\text{TVaR}_\alpha(Y)$ i $\text{TVaR}_\alpha(X)$. Uzasadnij.

7.3 Policz $\text{VaR}_\alpha(X)$ dla rozkładu wykładniczego.

7.4 Policz $\text{TVaR}_\alpha(X)$ dla rozkładu wykładniczego.

7.5 Policz $\text{VaR}_\alpha(X)$ dla rozkładu Pareto.

7.6 Policz $\text{TVaR}_\alpha(X)$ dla rozkładu Pareto.

7.7 Pokaż, że jeśli N ma rozkład normalny ze średnią 0 i wariancją 1: $\mathcal{N}(0, 1)$ to $\sigma N + \mu$ ma rozkład normalny $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Następnie pokaż, że

$$\text{VaR}_\alpha(X) = \mu + \sigma \Phi^{-1}(\alpha)$$

oraz

$$\text{TVaR}_\alpha(X) = \mu + \sigma \frac{\phi(\Phi^{-1}(\alpha))}{1 - \alpha},$$

gdzie ϕ i Φ są odpowiednio gęstością i dystrybuantą zmiennej losowej N .

7.8 Niech X ma rozkład z

$$\Pr(X = k) = \frac{1}{1 + \beta} \left(\frac{\beta}{1 + \beta} \right)^{k-1},$$

gdzie $k = 1, 2, \dots$. Oblicz $\text{VaR}_\alpha(X)$.

7.9 Niech X ma rozkład z

$$\Pr(X = k) = \frac{1}{1 + \beta} \left(\frac{\beta}{1 + \beta} \right)^{k-1},$$

gdzie $k = 1, 2, \dots$. Oblicz $\text{TVaR}_\alpha(X)$.

7.10 Pokaż, że $\text{VaR}_\alpha(X)$ ma następującą własność:

- monotoniczność: $X \leq_{st} Y$ implikuje $\text{VaR}_\alpha(X) \leq \text{VaR}_\alpha(Y)$.

7.11 Pokaż, że $\text{VaR}_\alpha(X)$ ma następującą własność:

- dodatnia jednorodność: $\text{VaR}_\alpha(cX) = c\text{VaR}_\alpha(X)$, dla $c > 0$.

7.12 Pokaż, że $\text{VaR}_\alpha(X)$ ma następującą własność:

- $\text{VaR}_\alpha(X + c) = \text{VaR}_\alpha(X) + c$, dla $c > 0$.

8 Lista 8; Polisy

8.1 Wielkość X odszkodowania za błędy lekarskie ma rozkład

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Oblicz średnią wypłatę na szkodę i średnią wypłatę na płatność pod warunkiem, że:

- (i) zawarto kontrakt ze współpłaceniem $\beta = 0.5$;
- (ii) zawarto kontrakt z dopuszczalnym limitem $k = 3$;
- (iii) zawarto kontrakt ze współpłaceniem $\beta = 0.5$ i dopuszczalnym limitem $k = 3$
- (iv) zawarto kontrakt z franszyzą integralną $d = 1$.

8.2 Dla ryzyka z modelu [2] z listy 6 oblicz oczekiwaną wypłatę na szkodę i na płatność, jeśli jest wkład własny w wysokości $d = 500$ oraz współpłacenie w wysokości 20% przez ubezpieczonego ($\alpha = 0.8$).

8.3 Wielkość X odszkodowania za błędy lekarskie ma rozkład $F_4(x)$. Zawarto kontrakt z współpłaceniem $\beta = 0.5$ i dopuszczalnym limitem $k = 3$. Oblicz średnią wypłatę na szkodę.

8.4 Dla modelu [4] oblicz EY^L i EY^P oraz oczekiwaną wielkość straty ubezpieczyciela przy franszyzie integralnej. Przyjmij $d = 5000$.

8.5 Dla ryzyka z modelu [4] z listy 6 oblicz oczekiwaną wypłatę na szkodę jeśli jest współpłacenie w wysokości 20% przez ubezpieczonego i dopuszczalny limit w wysokości 20000.

8.6 Dla ryzyka X zaprojektowano ubezpieczenie mające wkład własny wraz z współpłaceniem i dopuszczalnym limitem w postaci

$$Y = \begin{cases} 0 & X < 10, \\ \beta(X - d) & d \leq X < 60, \\ \beta(X - d) & 60 \leq X. \end{cases}$$

- (i) oblicz oczekiwaną stratę na szkodę jeśli X ma rozkład wykładniczy $\text{Exp}(50)$;

- (ii) oblicz oczekiwaną stratę na szkodę jeśli X ma rozkład Pareto(α, θ), gdzie $\alpha = 2$ i $\theta = 50$
- (iii) oblicz oczekiwaną stratę na płatność jeśli X ma rozkład Pareto(α, θ), gdzie $\alpha = 2$ i $\theta = 50$
- (iv) oblicz oczekiwaną stratę na płatność jeśli X ma rozkład Pareto(α, θ), gdzie $\alpha = 2$ i $\theta = 50$

8.7 Niech X ma rozkład Pareto (α, θ) z gęstością

$$f(x) = \frac{\alpha\theta^\alpha}{(x + \theta)^\alpha}.$$

Niech $\alpha = 1/2$ i $\theta = 100$. Czy można mówić o składce netto dla ryzyka X .

Rozważmy polisę z dopuszczalnym limitem 100. Dla tej polisy oblicz składkę netto oraz składkę ochylenia standardowego z $a = 1$.

- 8.8 W 100 szkodach w 1995 r. było: 42 których wielkości były pomiędzy 0-300, 3 pomiędzy 300-350, 5 pomiędzy 350-400, 5 pomiędzy 400-450, 0 pomiędzy 450-500, 5 pomiędzy 500-600 i pozostałych 40 ponad 600. W następnych 3 latach przewiduje się inflację na poziomie 10%. W oparciu o dane z roku 1995, określić w przybliżeniu prawdopodobieństwo, że w 1998 r. szkoda przekroczy 500. Wsk. Niech X oznacza ryzyko w 1995 r. Informacja o rozkładzie X jest dana w zadaniu. Natomiast po uwzględnieniu inflacji, w 1998 r. będziemy mieli do czynienia z ryzykiem $(1.1)^3 X$.