

Wykład 8: Testy Studenta (podsumowanie)

- Trzy podstawowe typy testów Studenta:
 - test dla **jednej próby**
 - test dla dwóch **niezależnych prób**
 - test dla dwóch **prób zależnych** (dla par)
- Mają podobną strukturę, ale nieco różne hipotezy i statystyki testowe.
- Każdy z tych testów może być *kierunkowy* (alternatywa jednostronna) lub *niekierunkowy* (alternatywa dwustronna).

Test studenta dla pojedynczej próby, niekierunkowy

Przykład 1 (fikcyjny):

- Czy średnia prędkość aut na ulicy Mickiewicza jest różna od 50 km/h?
- Zmierzono prędkość 32 aut:

Prędkość aut w km/h		
n	średnia	s
32	66	5.5

Test Studenta dla jednej próby, kierunkowy

Bardziej interesujące pytanie:

- Czy średnia prędkość aut jest większa od 50 km/h?

Uwaga!

Decyzja o rodzaju hipotezy alternatywnej (kierunkowa lub niekierunkowa) powinna być podjęta **zanim** spojrzymy na dane liczbowe zebrane dla jej weryfikacji.

Decyzja ta może być podjęta na podstawie innych, np. historycznych danych lub na podstawie profilu zainteresowań, ogólnych oczekiwań itp.

Test studenta dla pojedynczej próby, też kierunkowy

- Czy średnia prędkość aut na ulicy Mickiewicza jest mniejsza niż 50 km/h??

Test Studenta dla dwóch niezależnych prób, niekierunkowy

Czy obecność enzymu G6PD jest związana z rozwojem artretyzmu (RA)?

Aby to zbadać, wybrano losowo 14 pacjentów chorych na artretyzm i utworzono grupę kontrolną z 17 zdrowych dorosłych.

U każdej z badanych osób zmierzono poziom G6PD we krwi. Wyniki podano w jednostkach/gram Hgb (Hgb=hemoglobina).

Poziom G6PD	RA	Grupa kontrolna
średnia	17.8	12.3
SD	3.2	2.84

Zakładając, że poziom G6PD w badanych populacjach ma w przybliżeniu rozkład normalny porównaj średnie poziomy G6PD u osób chorych na artretyzm i u osób zdrowych.
(Użyj testu Studenta i $df = n_1 + n_2 - 2$.)

Rozwiązanie

Pytanie naukowe: *Czy średni poziom enzymu G6PD u osób chorych na artretyzm jest taki sam jak u zdrowych osób?*

Oznaczenia:

μ_1 – średni poziom G6PD u osób chorych na artretyzm

μ_2 – średni poziom G6PD u zdrowych osób

Test Studenta dla dwóch niezależnych prób, kierunkowy

Zweryfikuj przydatność leku przeciwbolowego:
Lekarstwo uśmierzające ból zostało przetestowane na grupie 50 kobiet cierpiących na bóle poporodowe. 25 losowo wybranych kobiet dostało lekarstwo, a pozostałych 25 placebo. Dla każdej kobiety otrzymano wskaźnik uśmierzenia bólu w oparciu o wyniki cogodzinnego wywiadu. Zakres wskaźnika: od 0 (ból bez zmian) do 56 (całkowite uśmierzenie bólu na 8 godzin).

		Wskaźnik uśmierzenia bólu	
	<i>n</i>	<i>średnia</i>	<i>SD</i>
<i>placebo</i>	25	25.32	12.05
<i>lekarstwo</i>	25	31.96	13.78

Pytanie: Czy lekarstwo redukuje ból (bardziej efektywnie niż placebo)?

P-wartość: wprowadzenie

- Przed przystąpieniem do testowania należy wybrać poziom istotności α .
- Odrzucamy H_0 , gdy statystyka testowa jest **istotna, tzn.** znajdzie się **w obszarze odrzuceń**.
- Ten obszar to zbiór wartości w „ogonie/ogonach” rozkładu Studenta taki, że cała z gęstości rozkładu Studenta po tym zbiorze wynosi α .
- Nieco paradoksalnie, może się zdarzyć, że hipoteza odrzucona na poziomie istotności $\alpha = 0.05$ nie będzie odrzucona, jeżeli użyjemy $\alpha = 0.01$.

Przykład:

- Stosujemy dwustronny test Studenta z 18 df na poziomie istotności $\alpha = 0.05$. Wart. kryt. = 2.101.
- Statystyka testowa wyliczona w oparciu o dane wynosi $t = 2.3$.
- Wniosek:.....
- Patrycja woli użyć $\alpha = 0.01$. Wart. kryt. = 2.878.
- Patrycja użyła tych samych danych, więc $t = \dots$
- Jak dyskutować wynik testowania z kimś, kto użył innej wartości α ??

P-wartość: cd.

- Czego potrzeba, aby podjąć decyzję?
 - Tablicy rozkładu Studenta, aby ustalić wartość krytyczną.
 - Wartości statystyki testowej t .
- Czy Patrycja mogłaby uniknąć wyszukiwania nowej wartości krytycznej?
- Tak. Wystarczy znać tzw. P-wartość dla naszej statystyki/danych. P-wartość umożliwia podjęcie decyzji przy każdym poziomie istotności α bez wyszukiwania wartości krytycznych.

P-wartość: definicja.

Definicja: **P-wartość to prawdopodobieństwo**, że przy prawdziwej hipotezie zerowej **wartość statystyki** przyjmie wartość **bardziej ekstremalną**, niż zaobserwowana w danej próbie.

- Dla dwustronnego testu Studenta P-wartość to całka z gęstości rozkładu Studenta na prawo od $+|t|$ i na lewo od $-|t|$.
- Dla testów jednostronnych P-wartość to całka po jednej stronie zaobserwowanej statystyki w kierunku wyspecyfikowanym przez alternatywę:
 - Przy $H_A: \mu_1 > \mu_2$, P-wartość to całka na prawo od t .
 - Przy $H_A: \mu_1 < \mu_2$, P-wartość to całka na lewo od t .

Przykład, cd.

- Przy 18 df i $t = 2.3$, P-wartość dla testu dwustronnego wynosi 0.034.
- Jest to całka z gęstości rozkładu Studenta na prawo od +2.3 i na lewo od -2.3.
- Jak używamy P-wartości:
 - Porównujemy ją z α :
 - Gdy P-wartość $< \alpha$, to
 - Gdy P-wartość $> \alpha$, to

- Zatem mówimy Patrycji, że P-wartość wynosi 0.034 i ona wie od razu, że na poziomie istotności $\alpha = 0.01$
- A my wiemy, że na poziomie istotności $\alpha = 0.05$
- P-wartość warto podać razem z wynikiem testu.
- Na przykład: „To badanie na poziomie istotności 0.05 potwierdza (P-wartość=0.034), że

Szacowanie P-wartości

- P-wartość można obliczyć przy pomocy komputera.
- P-wartość można także **oszacować** w przybliżeniu korzystając z tablic rozkładu Studenta. W tym wypadku należy znaleźć wartości krytyczne sąsiadujące z zaobserwowaną wartością statystyki.
- Szukana P-wartość leży pomiędzy poziomami istotności odpowiadającymi tym wartościom krytycznym.

df	Upper tail probability p									
	.25	.20	.15	.10	.05	.025	.01	.005	.0025	.001
1	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.71	15.89	31.82	63.66	127.3
2	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	4.849	6.965	9.925	14.09
3	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	3.482	4.541	5.841	7.453
4	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	2.999	3.747	4.604	5.598
5	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	2.757	3.365	4.032	4.773
6	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	2.612	3.143	3.707	4.317
7	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.517	2.998	3.499	4.029
8	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.449	2.896	3.355	3.833
9	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.398	2.821	3.250	3.690
10	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.359	2.764	3.169	3.581
11	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.328	2.718	3.106	3.497
12	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.303	2.681	3.055	3.428
13	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.282	2.650	3.012	3.372
14	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.264	2.624	2.977	3.326
15	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.249	2.602	2.947	3.286
16	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.235	2.583	2.921	3.252
17	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.224	2.567	2.898	3.222
18	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.214	2.552	2.878	3.197
19	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.205	2.539	2.861	3.174
20	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.197	2.528	2.845	3.153
21	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.189	2.518	2.831	3.135
22	0.686	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.183	2.508	2.819	3.119
23	0.685	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.177	2.500	2.807	3.104
24	0.685	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.172	2.492	2.797	3.091
25	0.684	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.167	2.485	2.787	3.078
26	0.684	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.162	2.479	2.779	3.067
27	0.684	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.158	2.473	2.771	3.057
28	0.683	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.154	2.467	2.763	3.047
29	0.683	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.150	2.462	2.756	3.038
30	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.147	2.457	2.750	3.030
40	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.123	2.423	2.704	2.971
50	0.679	0.849	1.047	1.299	1.676	2.009	2.109	2.403	2.678	2.937
60	0.679	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000	2.099	2.390	2.660	2.915
80	0.678	0.846	1.043	1.292	1.664	1.990	2.088	2.374	2.639	2.887
100	0.677	0.845	1.042	1.290	1.660	1.984	2.081	2.364	2.626	2.871
1000	0.675	0.842	1.037	1.282	1.646	1.962	2.056	2.330	2.581	2.813
z*	0.674	0.841	1.036	1.282	1.645	1.960	2.054	2.326	2.576	2.807
Confidence level C										
	50%	60%	70%	80%	90%	95%	96%	98%	99%	99.5%

Kontynuacja przykładu

- Oszacuj p-wartość dla dwustronnego testu Studenta, jeżeli wartość statystyki testowej wynosi 2.3, a liczba stopni swobody $df=18$.

Testy Studenta	Hipoteza a Zerowa	Hipoteza alternatywna				df	t_s	(1- α) PU
		dwustronne		jednostronne				
		H_0	H_A	Obszar Kryt.	H_A			
Jedna Próba	$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$t_s < -t_{\alpha/2}$ $t_s > t_{\alpha/2}$	$\mu < \mu_0$	$t_s < -t_\alpha$	n-1	$\frac{\bar{y} - \mu_0}{SE_{\bar{y}}}$	dla μ : $y \pm t_{\alpha/2} SE_{\bar{y}}$
				$\mu > \mu_0$	$t_s > t_\alpha$			
Dwie Niezależne Próby	$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 \neq \mu_2$	$t_s < -t_{\alpha/2}$ $t_s > t_{\alpha/2}$	$\mu_1 < \mu_2$	$t_s < -t_\alpha$	n_1+n_2-2 albo podany wzór	$\frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_2}{SE_{\bar{d}}}$	dla $\mu_1 - \mu_2$: $y_1 - y_2 \pm t_{\alpha/2} SE_{\bar{y}_1 - \bar{y}_2}$
				$\mu_1 > \mu_2$	$t_s > t_\alpha$			
Dwie Zależne Próby	$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 \neq \mu_2$	$t_s < -t_{\alpha/2}$ $t_s > t_{\alpha/2}$	$\mu_1 < \mu_2$	$t_s < -t_\alpha$	$n_d - 1$	$\frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_2}{SE_{\bar{d}}}$	dla $\mu_1 - \mu_2$: $y_1 - y_2 \pm t_{\alpha/2} SE_{\bar{d}}$
				$\mu_1 > \mu_2$	$t_s > t_\alpha$			