

Statystyka w Zastosowaniach

Laboratorium 2

Test Studenta

Rozważmy problem testowania dla dwóch prób: $X_1, \dots, X_{n_1} \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y_1, \dots, Y_{n_2} \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, gdzie σ_1 i σ_2 są nieznane, $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ vs $H_A : \mu_1 \neq \mu_2$.

1. W oparciu o symulacje komputerowe oszacuj dokładność poprawki Welcha-Satterthwaite'a dla testu Studenta: skonstruuj przedział ufności na poziomie istotności 0.95 dla p-stwa błędu pierwszego rodzaju gdy $n_1 = 5$, $\sigma_1 = 1$, $n_2 = 10$, $\sigma_2 = 5$ i $\alpha = 0.05$, $\alpha = 0.1$.
2. Niech $n_1 = 5$, $n_2 = 10$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$, $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 1.1$. Teoretycznie wyznacz moc testu Studenta, wykorzystującego informację o tym, że $\sigma_1 = \sigma_2$ dla $\alpha = 0.05$ [wykorzystaj dystrybucję niecentralnego rozkładu Studenta (funkcja pt w R)] i porównaj z wyznaczoną w oparciu o symulacje komputerowe mocą testu Studenta z poprawką Welcha-Satterthwaite'a (nie wykorzystującego wiedzy o stałym σ).
3. W tym zadaniu będziemy testować H_0 za pomocą statystyki ogólnego testu Studenta:

$$T = \frac{|\bar{X} - \bar{Y}|}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}},$$

gdzie $\bar{X} = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} X_i$, $\bar{Y} = \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} Y_i$, $s_1^2 = \frac{1}{n_1-1} \sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \bar{X})^2$, $s_2^2 = \frac{1}{n_2-1} \sum_{i=1}^{n_2} (Y_i - \bar{Y})^2$. W oparciu o symulacje komputerowe skonstruuj 95% przedział ufności dla p-stwa błędu pierwszego rodzaju jeżeli wartość krytyczną weźmiemy z rozkładu normalnego $z_{kr} = \Phi^{-1}(1 - \alpha/2)$. Obliczenia wykonaj dla $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$, $\alpha = 0.05, 0.1$ i

- a) $n_1 = 5$, $n_2 = 10$
 - b) $n_1 = 10$, $n_2 = 20$
 - c) $n_1 = 20$, $n_2 = 40$
 - d) $n_1 = 40$, $n_2 = 80$
4. Powtórz obliczenia z punktu [3.] w sytuacji gdy X_i i Y_i pochodzą z rozkładu wykładniczego z parametrem $\lambda = 1$.