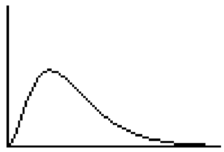
Lista 4 - podsumowanie

Mam nadzieję, że rozwiązania zadań **1**, **2**, **3** nie sprawiły problemów. Metody były omówione w części demonstracyjnej do tych zajęć (nie było od Państwa do tych zadań żadnych pytań). Zadanie **4** zostało omówione na filmie z następnych zajęć, zadanie analogiczne do **6** pojawiło się na następnej liście, więc można je jeszcze raz przemyśleć.

Zad. 5. W ujęciu graficznym nie powinno już sprawiać problemów. Rozważmy funkcję $f(x) = \frac{10x^2}{1{,}001^x}$. Jej wykres wygląda jak na rysunku. Jaki dobrać zakres ekranu, żeby dobrze zobaczyć własności tej funkcji? Jak odczytać z wykresu wartość maksymalną funkcji? Jak odczytać wartości argumentów, dla których wartość funkcji spada poniżej 1000000 lub poniżej 1?

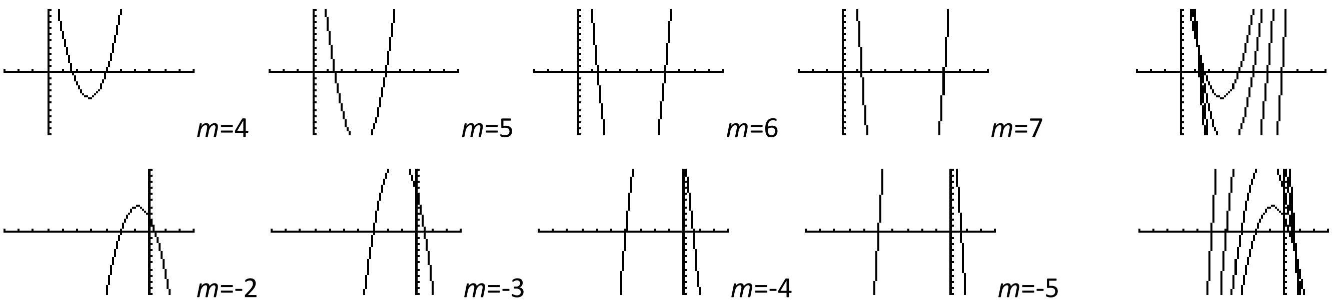


Challenge (zad. 7)

Dla jakich całkowitych wartości parametru *m* wielomian $W(x) = (m-1)x^2 - (m^2+1)x + m^2 + m$ posiada pierwiastki całkowite?

a) Rozwiązanie bez kalkulatora
Widać, że dla $m = 1$ otrzymujemy równanie liniowe postaci $-2x+2 = 0$, które ma pierwiastek całkowity 1. Dla $m \neq 1$ obliczamy wyróżnik trójmianu $\Delta = m^4 - 4m^3 + 2m^2 + 4m + 1$. Jeśli zauważymy, że $\Delta = (m^2 - 2m - 1)^2$, jesteśmy w domu. Widać, że wyróżnik jest zawsze nieujemny, a pierwiastek z niego jest całkowity. To zachęca do obliczenia pierwiastków równania kwadratowego ze wzoru. Otrzymujemy (po rachunkach) $x_1 = m$, $x_2 = {}^{m+1}/_{m-1}$. Dla całkowitym wartości *m* jeden pierwiastek jest zatem zawsze całkowity, a drugi? Metodą zgadywania można sprawdzić, że x_2 jest całkowite dla $m \in \{-1, 0, 2, 3\}$, ale czy to już wszystkie dobre wartości *m*? Sprawdzanie „na piechotę" wydaje się beznadziejne. Skorzystajmy ze wzorów Viety. Jeśli pierwiastki byłyby całkowite, to ich suma też, zatem całkowite byłoby $x_1 + x_2 = (m^2+1)/(m-1) = m + 1 + {}^2/_{m-1}$. Teraz już widać, że $m-1$ musi dzielić 2, czyli należeć do zbioru $\{\pm 1, \pm 2\}$, co daje $m \in \{-1, 0, 2, 3\}$. Uwaga! Ponieważ otrzymaliśmy te wartości, <u>zakładając</u>, że pierwiastki są całkowite, trzeba wykonać sprawdzenie (tzw. dowód redukcyjny), ale to już wcześniej wykonaliśmy, szukając rozwiązania po omacku. Ostatecznie warunki zadania spełniają wartości *m* ze zbioru $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$. Bez kalkulatora nic więcej z tego zadania się już nie dowiemy.

b) Rozwiązanie z kalkulatorem graficznym
Na początku sprawnie wykonujemy wykresy $W(x)$ dla różnych *m* całkowitych (poza m=-1). Na rysunkach *m* przyjmuje kolejno wartości 4, 5, 6, 7 (i wszystkie na jednym wykresie) oraz -2, -3, -4, -5 (i wszystkie na jednym).W tym zadaniu widać, do czego przydaje się włączenie skalowania osi.



<u>Hipotezy</u> widać jak na dłoni (bez żadnych rachunków):
- dla każdego m=-1 są dwa pierwiastki (tzn. wyróżnik jest dodatni),
- jeden z pierwiastków jest równy *m* (odczyt ze skalowania lub opcja *intersect*),
- drugi pierwiastek zbliża się do 1 (z prawej strony dla $m \to \infty$, z lewej dla $m \to -\infty$)
- tylko dla $m \in \{-1, 0, 2, 3\}$ drugi pierwiastek jest całkowity.

c) Oczywiście hipotezy nadal wymagają dowodu, ale rachunki są teraz znacznie prostsze niż w rozwiązaniu bez kalkulatora (w szczególności nie obliczamy wyróżnika ani nie używamy wzoru na pierwiastki). Hipotezę drugą uzasadnimy, wyliczając po prostu $W(m)$. Drugi pierwiastek wyliczymy teraz łatwo ze wzorów Viety, bo

$m + x_2 = m + 1 + {}^{2}/_{m-1}$. czyli $x_2 = 1 + {}^{2}/_{m-1}$, a to dowodzi natychmiast pozostałych trzech hipotez. Możemy też tym łatwym sposobem odpowiedzieć na znacznie ogólniejsze i trudniejsze pytanie: dla jakich *m* rzeczywistych przynajmniej jeden pierwiastek równania $W(x) = 0$ jest całkowity.

d) Oglądamy wykresy $W(x)$ dla *m* bliskich 1. Na wykresie poniżej $m \in \{1,5; 1,4; 1,3; 1,2; 1,1\}$.

Z tych obserwacji wynika, że parabole rozginają się / rozprostowują się. Istotnie, coraz bardziej przylepiają się do prostej $y = -2x+2$ (jest zaznaczona na drugim rysunku). Podobny efekt można zaobserwować, gdy m zbliża się do 1 od strony lewej tzn. $m \in \{0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9\}$. Oglądamy tu zbieżność ciągu funkcji i można to pojęcie zobaczyć na długo przed formalnym wprowadzeniem definicji tego pojęcia.

Wnioski. Zadanie 7 pokazuje rolę kalkulatora w nauczaniu i w rozwiązywaniu zadań.
- przerzucamy istotę działań z rachowania na eksperymentowanie i wnioskowanie; rachunki mogłyby być za trudne dla słabszych uczniów, a z kalkulatorem każdy ma szanse na rozwiązanie ze zrozumieniem;
- odkrywamy nowe aspekty zadania, uogólniamy problem;
- stawiamy nowe problemy matematyczne, które w tradycyjnym rozwiązaniu umykały naszej uwadze lub w ogóle nie dały się zauważyć;
- uczeń nie tylko wykonuje polecenia zawarte w zadaniu, ale staje się odkrywcą nowych faktów, formułuje i dowodzi hipotezy, widzi potrzebę dowodu, rozumie, po co dowodzi się twierdzenia; staje się badaczem.

Powyższe można i należy dopisać do listy celów nauczania matematyki z TI.