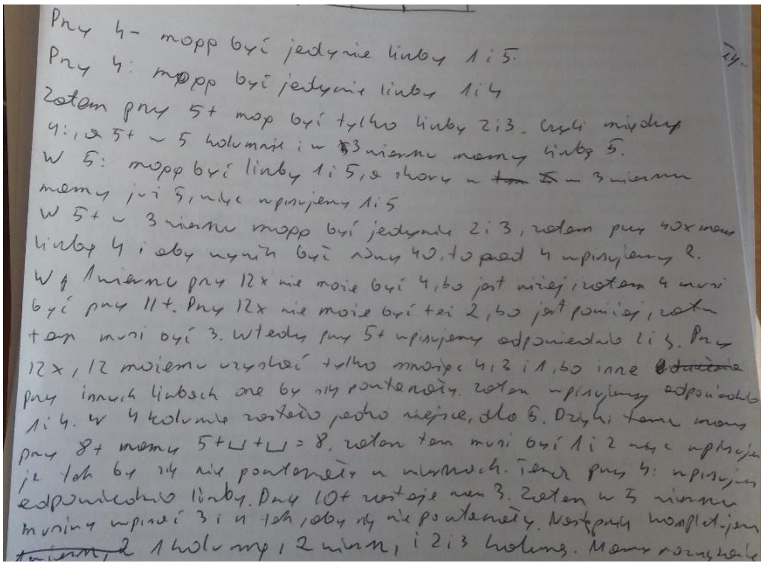
Egzamin poprawkowy z metodyki nauczania matematyki 1
Szkice rozwiązań i uwagi

Zad. 1. 1 pkt był przyznawany za walory dydaktyczne, 1 pkt – za poprawny wynik końcowy, 3 pkt. za zrozumiale zapisany dowód jedyności rozwiązania (te punkty były przyznawane nawet jeśli nie było wyniku końcowego). Walory to: rachunki podszyte myśleniem logicznym i strategicznym oraz trening umiejętności uzasadniania, a także atrakcyjna dla ucznia forma łamigłówki. Ostateczny wynik czytany wierszami:
41532
25413
12345
53124
34251
Możliwy sposób zapisu rozumowania poniżej. Są w nim właściwe uwagi, ale podane bez uzasadnień, a przecież o nie tu chodziło.


Przy 4- mogą być jedynie liczby 1 i 5.
Przy 4: mogą być jedynie liczby 1 i 4
Zatem przy 5+ mogą być tylko liczby 2 i 3. Czyli między 4: i 5+ w 5 kolumnie i w 3 wierszu mamy liczbę 5.
W 5: mogą być liczby 1 i 5, a skoro w ~~tym~~ 3 wierszu mamy już 5, więc wpisujemy 1 i 5
W 5+ w 3 wierszu mogą być jedynie 2 i 3, zatem przy 40x mamy liczbę 4 i aby wynik był równy 40, to przed 4 wpisujemy 2.
W 1 wierszu przy 12x nie może być 4, bo jest niżej, zatem 4 musi być przy 11+. Przy 12x nie może być też 2, bo jest poniżej, zatem tam musi być 3. Wtedy przy 5+ wpisujemy odpowiednio 2 i 3. Przy 12x, 12 możemy uzyskać tylko mnożąc 4, 3 i 1, bo inne przy innych liczbach one by się powtarzały. Zatem wpisujemy odpowiednio 1 i 4. W 4 kolumnie zostało jedno miejsce, dla 5. Dzięki temu mamy przy 8+ mamy 5+□+□=8, zatem tam musi być 1 i 2 więc wpisuję je tak by się nie powtarzały w wierszach. Teraz przy 4: wpisujemy odpowiednio liczby. Przy 10+ zostaje nam 3. Zatem w 3 wierszu musimy wpisać 3 i 4 tak, aby się nie powtarzały. Następnie kompletujemy 2 1 kolumnę, 2 wiersz, i 2 i 3 kolumnę. Mamy rozwiązanie

Zad. 2. Ściana czworościanu foremnego z modelu to trójkąt równoboczny, którego bok ma długość taką samą jak bok wyjściowego sześciokąta foremnego, czworościan ma sześć krawędzi, więc ich łączna długość wynosi $6 \cdot 4$ cm = 24 cm. Walory zadania: rozwija wyobraźnię geometryczną (umiejętność widzenia przestrzennej sytuacji na płaskim rysunku), praktyczna indywidualizacja wymagań (uczeń dobry wydedukuje odpowiedź z rysunku, uczeń słabszy wykona model). Za wynik wraz z uzasadnieniem – 2 pkt, za walory – 3 pkt.

Zad. 3. a) za przykład 1 pkt, b) za rozumowanie 2 pkt, ale jeśli brak uzasadnienia to 0 pkt, c) za rozumowanie 2 pkt, ale jeśli brak uzasadnienia to 0 pkt, d) za przykład 1 pkt, za przykład podany dla każdego $n > 7$ dodatkowe 3 pkt.
a) czworościan, b) nie da się, bo przynajmniej jedna ściana musi być trójkątem (to już 3 krawędzie) i z każdego jej wierzchołka muszą wychodzić 3 krawędzie, żeby powstał wielościan (a to już daje 6), c) Jeśli wielościan ma choć jedną ścianę czworokątną, to ma co najmniej osiem krawędzi (bo z każdego wierzchołka tego czworokąta wychodzą co najmniej trzy krawędzie, z czego dwie do sąsiednich wierzchołków). Jeszcze więcej przymusowych krawędzi będzie, gdy któraś ze ścian będzie miała więcej niż 4 boki. Zostały wielościany o wszystkich ścianach trójkątnych. Jeśli tych ścian jest n, to krawędzi jest $3n/2$ (bo każda łączy dwie ściany), a taka liczba nie chce być równa 7 (bo 14 nie dzieli się przez 3). W tym zadaniu nie można było założyć, że jedna ściana jest co najmniej czworokątem, co kilka osób zrobiło. d) dla n parzystego przykładem jest ostrosłup $n/2$ - kątny, a dla nieparzystego – ten sam ostrosłup z lekko ściętym wierzchołkiem podstawy (wówczas liczba krawędzi wyjściowego ostrosłupa wzrasta o 3, czyli wychodząc od podstawy trójkątnej mamy 9, a potem z kolejnych podstaw otrzymujemy większe liczby nieparzyste). W rozumowaniu nie można korzystać z nierówności wziętych z rękawa (nieuzasadnionych, niewytłumaczonych) i nie ma takiej potrzeby.

Błąd merytoryczny: *Chcąc otrzymać wielościan o najmniejszej liczbie krawędzi, ścian i wierzchołków, musimy utworzyć wielościan składający się z samych trójkątów. Otrzymujemy wtedy czworościan.* Same trójkątne ściany mają np. foremne ośmiościan i dwudziestościan.

Niektóre błędy językowe (pomijam interpunkcyjne):
- *Wycinamy sześcian i* **mamy** *12 krawędzi.* Jacy my mamy? Kto ma te krawędzie?
- Wielokąt ma boki, wielościan ma krawędzie.
- *Czemu ten wielościan pasuje…* Nie *czemu*, tylko *dlaczego. Komu*, *czemu* – na te pytania odpowiada celownik, a *czemu* nie znaczy *dlaczego*.

Zad. 4. Walory: zadanie jest realistyczne i tylko pozornie pozbawione sensu. Absolutnie nie można zakładać, że ruch odbywa się ze stałą prędkością, bo to właśnie pozbawia zadanie i sensu i realizmu. Nikt tak nie biega i nikt tak matematyki nie powinien używać. Metoda rozwiązania zadania to eksperyment lub szukanie danych w źródłach lub przynajmniej przyjęcie sensownych założeń oraz modelowanie. Niemal identyczne zadanie było omówione na wykładzie. Za komentarz do treści 2 pkt, za rozwiązanie 3 pkt. Za użycie w rozwiązaniu proporcji bez uzasadnienia proporcjonalności lub choćby powołania się na wielkości proporcjonalne 0 pkt. Nie wolno takich magicznych i niezrozumiałych dla ucznia metod stosować nigdy (a tym bardziej jeśli wykraczają poza materiał).
Niektóre błędy językowe (niemal bez interpunkcyjnych):
- *t to czas jaki przebiegła w ciągu 10 km*. Od kiedy przebiegamy czas, a nie drogę? I jeszcze brak przecinka w zdaniu wynikowym – dla matematyka – niedopuszczalne. Wszak każde uzasadnienie składa się ze zdań wynikowych.
- *Założyć* i *załorzyć* w jednym zdaniu? No tak, zawsze któreś będzie poprawne!
- *Uczeń otrzyma wyniki różniące się od siebie*. No pewnie, uczeń zazwyczaj różni się od wyniku.

Zad. 5. Konieczne było zastosowanie **metody nasilenia sprzeczności** (czyli potęgowania bezsensownych wniosków z niewłaściwego założenia). Stwierdzenie, że wychodzi jednostka *metr razy sekunda* jest bardzo słabe, bo niematematyczne. Przecież może właśnie z mnożenia wychodzi jednostka o nazwie *metr na sekundę* (czyli *metr mnożony na sekundę* – brzmi archaicznie, ale kto wie). Należało doprowadzić do sprzeczności z wiedzą przez ucznia posiadaną, np. tak:
N: *Co należy zrobić, aby obliczyć prędkość kolejki*?
U: *Pomnożyć drogę przez czas.*
N: *W jakich jednostkach mierzymy prędkość*?
U: *Na przykład w kilometrach na godzinę albo w metrach na sekundę* – jeszcze nie widzi sprzeczności!!!
N: *Co to znaczy, że poruszasz się z prędkością 3 km na h*?
U: *No, że w ciągu każdej godziny przechodzę 3 km.*
N: *Wyobraź sobie zawodników w biegu na 100 m. W jakim mniej więcej czasie przebiegają ten dystans*?
U: *Myślę, że potrzebują około 10 sekund.*
N: *Zatem z jaką biegną prędkością*?
U: *Zgodnie ze wzorem na obliczanie prędkości* $v = 100m \cdot 10s = 1000\ m/s$*, a to oznacza, że przebiegają 1 kilometr w ciągu sekundy. Coś tu nie gra*!!!
Jest to heureza, bo nastąpiło znaczne osłabienie zachowań nauczyciela realizowanych z pozycji siły. Uczeń przekonał się, że jego rozumowanie było błędne i nastąpiło to bez ingerencji autorytetu nauczyciela. Dokonano czegoś więcej niż tylko poprawy błędu. Uczeń uświadomił sobie jego istotę i konsekwencje.
Niektóra błędy językowe:
Jak liczymy prędkość? (łatwo – jest jedna). Prędkość *obliczamy* nie *liczymy*.

Zad. 6. Rozumowanie powinno być analogiczna jak w przypadku zadania z odcinkami z I terminu egzaminu. Warto było wykorzystać analogię płaską: koła narysować współśrodkowo i na niej pokazać **wzajemnie** (czyli rozumowanie powinno iść w obie strony) jednoznaczne przyporządkowanie geometryczne przez rzut środkowy (radialnie). To, że obie sfery mają nieskończenie wiele punktów, to za mało. Wszak tak jak różne są liczby, różne mogą być nieskończoności.
Niektóre błędy językowe:
- *…to otrzymamy punkt Q oraz P* (skoro *punkt*, a nie *punkty*, to $Q \equiv P$)
- *Jeśli chcemy wyznaczyć punkty w dwóch sferach to mają one tyle samo punktów*. Co to za argument (i znowu brak przecinka w zdaniu wynikowym).
- *Ile punktów znajduje się na koło*?

Zad. 7. Metoda zastosowana w takich przykładach na wykładzie pokazywała zastosowanie systemów pozycyjnych w technikach szybkich rachunków i można było z tego pomysłu skorzystać:
$5^0+5^1+5^2+5^3+5^4+5^5+5^6+5^7+5^8+5^9+5^{10}+5^{11}+5^{12}+5^{13} = 11111111111111_5 = 1/4 \cdot 44444444444444_5 = 1/4 \cdot (5^{14} - 1) =$
$6103515624:4 = 6103510000:4+1400+6 = 1525878906$

Można było tez zastosować paradygmat analogiczny do nieprawidłowego uzasadnienia wzoru na sumę nieskończonego ciągu geometrycznego. W tym wypadku uzasadnienie jest prawdziwe, bo suma jest skończona. Poniższy fragment jest prawie poprawny poza stroną edycyjną (dziwnie justowanie, zastosowana kursywa w tekście, zbędne wykorzystanie edytora równań – w żadnym z tych zapisów nie był potrzebny).

Mnożę szukaną sumę razy 5

$$5\left(5^0+5^1+5^2+5^3+5^4+5^5+5^6+5^7+5^8+5^9+5^{10}+5^{11}+5^{5^{12}}+5^{13}\right) =$$

$$= 5^1+5^2+5^3+5^4+5^5+5^6+5^7+5^8+5^9+5^{10}+5^{11}+5^{5^{12}}+5^{13}+5^{14}$$

Oznaczam szukaną sumę jako x. Zauważam, że:

$$5x+5^0=x+5^{14}$$

Przekształcam to równanie.

$$5x+1=x+5^{14}$$

$$4x=5^{14}-1$$

Korzystam z danych.

$$4x=6\,103\,515\,625-1$$

$$4x=6\,103\,515\,624$$

Dwukrotnie połowię liczbę po prawej stronie równości.

$$2x=3\,051\,757\,812$$

$$x=1\,525\,878\,906$$

Przyznawałam 2 pkt za poprawny wynik osiągnięty w technice sprytnych rachunków. Korzystanie ze wzorów dla ciągu geometrycznego było mocno nie na miejscu.

Zad. 8. Użycie równań (czasem z dwiema niewiadomymi wyrażonymi w stopniach) było sporym nadużyciem. Uznawałam tę metodę, jeśli ktoś dołożył dużej staranności, by była dla ucznia zrozumiała. Wystarczyło skorzystać z zadania z I terminu egzaminu. Prostopadłość wskazówek zachodzi 22 razy na 12 godzin, czyli wypada co $^{12}/_{22}$ = $^{6}/_{11}$ godziny. O 3 rano wskazówki są prostopadłe, wobec tego są też prostopadłe $^{6}/_{11}$ godziny wcześniej i później, zatem o godzinach 3+$^{6}/_{11}$ oraz 3–$^{6}/_{11}$, czyli o $3^{6}/_{11}$ $2^{5}/_{11}$. Obliczamy, że $^{6}/_{11}$ godziny to $^{360}/_{11}$ = $32^{8}/_{11}$ minuty, a $^{5}/_{11}$ godziny to $27^{3}/_{11}$ minuty. Prostopadłość wypada więc o godz. 3:$32^{8}/_{11}$ (lub inaczej 3:32:43,6) oraz o 2:$27^{3}/_{11}$ (lub inaczej 2:27:16,3). Przyznawano 2 pkt za poprawny wynik i 3 pkt za metodę (najlepiej jednak bez równań).

Niektóre błędy językowe (jakkolwiek byłyby niewiarygodne):

- *obje wskazówki* – Kto je obje i z czego?
- *O 3:00 obje wskazówki są ustawione pionowo.* Na moim zegarku 3:00 wygląda jednak inaczej.
- X *to miara kąta wskazówki godzinowej* - Gdzie ona ma ten kąt?
- Y *to kąt o mierze jaki pokonała wskazówka*??? (i jeszcze bez przecinka)
- *Wskazówki są prostopadłe do siebie*. Prostopadłość wskazówki do siebie jest dość trudna do uzyskania.

Zad. 9. Łącznie 5 pkt

a) wczoraj (zamiast w dniu wczorajszym),
Szkoła Podstawowa w Skoczowie (to nazwa instytucji)
„4 klasy” to cztery klasy, ale być może chodziło o „4. klasy” czwarte *klasy*.

b) ma 10 dni (bez czasu), czego innego może być 10 dni, jak nie czasu?
brak przecinka przed zdaniem podrzędnym (przed „które”)
to nie osoby rozwijają objawy, tylko u osób rozwijają się objawy

a) „jako liczba procent” (nie procentów), a najlepiej „jako procent”,
wrzutka powinna być wydzielona przecinkami

Zad. 10. Łącznie 3 pkt

a) Szansa jak jeden do stu
b) Kwota równa trzem złotym (w tekście nie będącym równaniem).
c) Iks jest większe od trzech lub równe trzy/trzem.