EGZAMIN – UWAGI, WSKAZÓWKI, ODPOWIEDZI

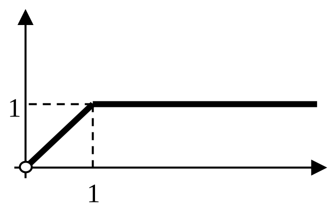
Zad. 1. Błąd polega na zastąpieniu słowa *funkcja* tożsamym słowem *przyporządkowanie*, które w programie nie jest zdefiniowane, a nie jest przecież pojęciem pierwotnym. Definicja stanie się zrozumiała, jeśli zaczniemy od pokazania przykładów, kontrprzykładów i przypadków szczególnych.

Plan heurezy:
1) Badanie wiedzy intuicyjnej (Czy znają słowo funkcja? W jakich sytuacjach można je zastosować?).
2) Przykłady i kontrprzykłady z życia, opis słowny, różne własności ('na' i 'w', 1-1 i z dziurami w dziedzinie/przeciwdziedzinie, wzajemnie jednoznaczna, itp.), dziedziny/przeciwdziedziny skończone i nieskończone, liczbowe i nieliczbowe, dyskretne i ciągłe.
3) Kontrprzykłady, przypadki szczególne (identyczność, funkcja stała) nadal wzięte z życia.
4) Przykłady i kontrprzykłady wzięte z różnych dziedzin matematyki (figura i jej miara, miara i opisana nią figura, ciągi liczbowe).
5) Samodzielne sformułowanie definicji funkcji.
6) Różne sposoby opisu funkcji (słowny, grafem, wzorem analitycznym).
7) Różne własności funkcji liczbowych, których nie mają inne funkcje.

Zad. 2. Mamy $f(f(f(x))) = a(a(ax+b)+b)+b = a^3x+a^2b+ab+b = a^3x+ b(a^2+a+1) = 27x-52$. Z porównania współczynników mamy $a^3=27$, czyli $a=3$ i $13b = -52$, czyli $b=4$. Zatem funkcja f jest dana wzorem $f(x) = 3x+4$, stąd funkcja odwrotna ma wzór $g(x) = {}^{(x+4)}/_3 = {}^1/_3\, x + {}^4/_3$ (skoro przepis f każe mnożyć przez 3 i odjąć 4, to przepis, który cofnie skutek działania f, powinien dodać 4 i dzielić przez 3). Należy wykonać sprawdzenie.

Zad. 3. Widać, że dziedziną funkcji są liczby rzeczywiste dodatnie. Zajmijmy się częścią wzoru funkcji.

$$\sqrt{x\cdot\frac{\sqrt{\frac{1+2x+x^2}{2x}}-\sqrt{\frac{1-2x+x^2}{2x}}}{\sqrt{\frac{1+2x+x^2}{2x}}+\sqrt{\frac{1-2x+x^2}{2x}}}}=\sqrt{x\cdot\frac{\frac{|1+x|-|1-x|}{\sqrt{2x}}}{\frac{|1+x|+|1-x|}{\sqrt{2x}}}}=\sqrt{x\cdot\frac{|1+x|-|1-x|}{|1+x|+|1-x|}}.$$



Rozpatrzmy 2 przypadki: A) jeśli $x>1$, $y=\sqrt{x\cdot\frac{1+x+(1-x)}{1+x-(1-x)}}=\sqrt{\frac{2x}{2x}}=1$,

B) jeśli $x\in(0,1]$, $y=\sqrt{x\cdot\frac{1+x-(1-x)}{1+x+(1-x)}}=\sqrt{\frac{2x^2}{2}}=|x|=x$.

Zatem wykres pierwszego czynnika we wzorze wygląda jak na rysunku. Ale potem mnożymy jeszcze tę funkcję przez $\cos x$, czyli 0 jest nadal wykluczone z dziedziny, na przedziale (0, 1) otrzymujemy sinusoidę ograniczoną wykresami funkcji $y=x$ i $y=-x$, a na przedziale $(1, \infty)$ zwykły wykres kosinusa. Funkcja jest ciągła w punkcie 1.

Zad. 4. Na trzeciej kostce brakowało opisu jednej ściany (mój błąd). Sprawdzałam wszystkie przyjęte wersje. Oryginalnie powinno być na C: 6, 6, 6, 2, 2, 2 (ale mogło też być 6, 6, 2, 2, 2, 2 – wnioski analogiczne). Wówczas $P(A$ wygra z $B) = {}^{24}/_{36} = {}^2/_3$, $P(B$ wygra z $C) = {}^{18}/_{36} = {}^1/_2$, $P(C$ wygra z $A) = {}^{24}/_{36} = {}^2/_3$. Zjawisko paradoksalne, bo kostka A jest znacznie lepsza niż B, B jest równie dobre jak C, a C jest znacznie lepsze niż A. Którą kostkę warto więc wybrać do gry dwoma kostkami??? Dalej $P(A$ wygra z B i $C) = {}^{72}/_{216} = {}^1/_3$, $P(B$ wygra z A i $C) = {}^{36}/_{216} = {}^1/_6$, $P(C$ wygra z A i $B) = {}^{72}/_{216} = {}^1/_3$.

Zad. 5. Dany jest trapez o podstawach długości 3 i 4 oraz prostopadłych przekątnych. Możliwe pytanie: Jaki jest maksymalny obwód takiego trapezu.

Zad. 6. Przekrój jest trapezem równoramiennym o podstawach AB oraz przekątnej frontowej ściany równoległej do AB (bo na równoległych ścianach prowadzimy proste równoległe). Długości podstaw to $\sqrt{2}$ i $\sqrt{2}/2$ (podobieństwo w skali ½), długość ramienia trapezu to $\sqrt{5}/2$ (twierdzenie Pitagorasa), a wysokość trapezu to ¾ $\sqrt{2}$ (z twierdzenia Pitagorasa). Pole trapezu to $^9/_8$= 1 i $^1/_8$.

Zad. 7. Dla trójkąta wpisanego w okrąg o średnicy 1 zachodzi klasyczna nierówność trójkąta, która ma wówczas postać $\sin\alpha + \sin\beta \geq \sin\gamma$. Dzieląc obie strony przez iloczyn sinusów wszystkich trzech kątów (a są to liczby dodatnie, bo miary kątów są z przedziału (0°, 180°), otrzymamy $\frac{1}{\sin\beta\sin\gamma} + \frac{1}{\sin\alpha\sin\gamma} \geq \frac{1}{\sin\alpha\sin\beta}$ lub równoważnie $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} \geq \frac{1}{h_c}$. Nierówność jest prawdziwa dla każdego trójkąta, bo wystarczy ją przemnożyć stronami przez skalę podobieństwa z rozważanym trójkątem (czyli przez długość średnicy okręgu opisanego na trójkącie). Zatem suma odwrotności długości dwóch (dowolnych) wysokości trójkąta jest większa od odwrotności długości trzeciej wysokości. Można było też skorzystać z własności miarowych trójkąta (wzór na pole).

Zad. 8. Aby skorzystać ze wskazówki, musimy stwierdzić, że dziedziną równania są liczby rzeczywiste dodatnie (inaczej wskazówka jest bezwartościowa). Podstawiając x=9^t, mamy równoważne w dziedzinie równanie 2+3^t=5^t, które oczywiście jest spełnione przez t=1. Ale czy to jedyny pierwiastek? Uzasadnienie: dzielimy stronami przez 3^t, otrzymując $1+2(^1/_3)^t = (^5/_3)^t$; funkcja po lewej stronie jest malejąca (dlaczego?), a po prawej rosnąca (dlaczego?), więc równanie może mieć co najwyżej jeden pierwiastek, a skoro spełnia je liczba 1, to jest to pierwiastek jedyny. Zdanie „x=9 jest rozwiązaniem równania" nie jest prawdziwe. Rozwiązaniem równania nie może być inne równanie.

Zad. 9

- sieroty i wdowy pozostawione na końcu linijki,
- małe litery w nazwie przedmiotu (poza ew. pierwszym słowem),
- cyfra napisana kursywą,
- poprawna pisownia daty: 3.07.2020, 03.07.32020, 3 VII 2020 (bez kropek), 3 lipca 2020 (miesiąc w dopełniaczu, bez podpórek fleksyjnych),
- interpunkcja: przecinki oddzielające imiesłowy przysłówkowe (zwłaszcza współczesne) oraz zdania podrzędnie złożone,
- rzeczowniki pospolite z małej litery (słowo, honor),
- ortografia: honor, sfotografować,
- wysyłamy na adres, pisownia *mejl* jest dopuszczona w języku polskim, ale forma *mail* jest niepoprawna, chyba że *e-mail*.
- *korona-egzamin* jest błędny, *koronaegzamin* był poprawny (jak *koronaferie* itp.),
- *pismo odręczne* jest poprawne,
- kropki przy skrótach, które nie są zakończone ostatnią literą wyrazu, np. godz.
- frazeologia: pomoc *drugiej osoby* lub *osób trzecich*,
- pisownia form rodzajowych: *pracował(a)*, *pracował(a)by*, *pracowałem(-łam)*, ukośnik tylko w formach pełnych: *pracował/pracowała*, *pan/pani*.

Końcowa ocena z egzaminu była obniżana o jeden stopień za występujące w rozwiązaniach rażące błędy ortograficzne i o pół stopnia za rażące błędy interpunkcyjne oraz gramatyczne (niezależnie). Przykłady: