

Lista zadań nr 10 – Wielomiany i równania funkcyjne

A) WIELOMIANY

Zad. 1. Sformułuj twierdzenie o rozkładzie wielomianu na czynniki. Rozłóż na czynniki wielomiany.

a) $3x^4-1$ b) x^2+1 c) $4x^4+1$ d) x^6+1

Zad. 2. Oblicz sumę współczynników wielomianu.

a) $W(x) = 1 + (4x-1) + (4x-1)^2 + \dots + (4x-1)^k$, gdzie $k \in \mathbf{N}$ b) $W(x) = 3(x^2+2x-4)^{2006} - 2(x-2)^{2005}$

Zad. 3. Ile pierwiastków dodatnich, a ile ujemnych ma wielomian $W(x) = x^{2021} + x - 1$?

Zad. 4. Podaj przykład wielomianu stopnia 100 o współczynnikach całkowitych, którego najmniejsza wartość jest równa połowie największej wartości.

Zad. 5. Podaj niezerowy wielomian o współczynnikach całkowitych i o podanym miejscu zerowym.

a) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ b) $\sqrt{2004 + 2\sqrt{2005}}$

Zad. 6. Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu $W(x) = x^{2021} - 7x^{19} + 7x^3 - 1$ przez wielomian $P(x) = x^3 - x$.

Zad. 7. Dla jakich liczb całkowitych funkcja wymierna $(x^4 - 4x^2 + x + 6)/(x + 2)$ przyjmuje wartości całkowite?

Zad. 8. Wiadomo, że wielomian $x^2 + ax + b$ o współczynnikach całkowitych ma dwa pierwiastki i że -5 jest jednym z nich. Czy drugi pierwiastek tego wielomianu musi być liczbą całkowitą?

Zad. 9. Znajdź granice pierwiastków wielomianu $ax^2 + bx + c$ o wszystkich współczynnikach ujemnych przy a dążącym do 0.

Zad. 10. Dla jakich całkowitych wartości parametru m wielomian $W(x)$ ma całkowity pierwiastek?

$$W(x) = (m - 1)x^2 - (m^2 + 1)x + m^2 + m$$

a) Rozwiąż zadanie „na sucho”, czyli bez TI.

b) Obejrzyj wykresy funkcji $W(x)$ dla różnych całkowitych wartości m . Postaw hipotezy dotyczące pierwiastków wielomianu. Udowodnij postawione hipotezy.

c) Obejrzyj parabole dla m coraz bliższych 1. Poszerz swoje hipotezy. Jakie pojęcie matematyczne tu „oglądamy”?

B) RÓWNANIA FUNKCYJNE

Zad. 11. Znajdź funkcje o dziedzinie rzeczywistej spełniające równanie.

a) $x^2 f^2(x) + 1 = 2x f(x)$ b) $f(x+y) - 2f(xy) - 3f(x) + (2x^2 - 1)f(y) = 2x(xy - 1)$

c) $f(x^3) = x^9 + 5$ d) $f(x+y) = f(x) + y$

Zad. 12. Ile jest funkcji liniowych $f(x) = ax + b$ o całkowitych współczynnikach spełniających warunek $f(b) = 2020a$.

Zad. 13. Sformułuj warunek monotoniczności funkcji. Niech f będzie rosnąca na \mathbf{R} . Czy zachodzi implikacja: $a + b > c \Rightarrow f(a) + f(b) > f(c)$?

Zad. 14. Znajdź funkcje f i g spełniające równanie $2f(x) - 3g(y) = 2x^2 + xy + 3y^2 - 1$.