METODYKA NAUCZANIA MATEMATYKI 3

Lista zadań nr 10 – Wybrane rozwiązania

Zad. 2. a) $W(x)$ jest wielomianem stopnia k, więc $W(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_kx^k$. Suma wszystkich współczynników dowolnego wielomianu jest równa wartości tego wielomianu dla argumentu 1, zatem $W(1) = 1 + (4\cdot1-1) + (4\cdot1-1)^2 + \ldots + (4\cdot1-1)^k = 1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^k$. Teraz obliczając sumę k+1 początkowych wyrazów ciągu geometrycznego, otrzymujemy $\frac{1-3^{k+1}}{1-3} = \frac{3^{k+1}-1}{2}$.

b) Suma współczynników wielomianu jest równa $W(1) = 3\,(1 + 2 - 4)^{2006} - 2\,(1 - 2)^{2005} = 3\,(-1)^{2006} - 2\,(-1)^{2005} = 3 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) = 3 + 2 = 5$.

Zad. 3. Wielomian stopnia nieparzystego ma pierwiastek rzeczywisty. Ten wielomian jest rosnący, bo pochodna jest stale dodatnia $2017x^{2016}+1$, wiec pierwiastek jest tylko jeden. $W(0)=-1$, a dla dużych x wartości są dodatnie, więc z ciągłości pierwiastek musi być w przedziale $(0, \infty)$.

Zad. 4. Nie ma takiego wielomianu, bo jeśli wielomian parzystego stopnia ma wartość najmniejszą, to nie ma największej i na odwrót.

Zad. 5. a) Ponieważ $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 = 5+2\sqrt{6}$, mamy: $((\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-5)^2=24$, więc szukanym wielomianem może być $(x^2-5)^2-24 = x^4-10x^2+1$.

b) Oznaczmy podany pierwiastek przez p. Mamy $p^2 = 2004+2\sqrt{2005}$, skąd $(p^2-2004)^2 = 4\cdot2005$, więc szukanym wielomianem może być $(x^2-2004)^2 - 4\cdot2005 = x^4-4008x^2+2004^2-4\cdot2005$.

Zad. 6. Reszta $R(x)$ jest wielomianem stopnia co najwyżej 2. Zapiszmy go jako ax^2+bx+c. Mamy: $W(x) = P(x)\cdot Q(x)+ax^2+bx+c$ dla pewnego wielomianu Q, przy czym ponieważ $P(0)=P(1)=P(-1)=0$, zachodzą równości: $W(0)=c$, $W(1)=a+b+c$ i $W(-1)=a-b+c$. Po obliczeniu lewych stron otrzymujemy układ trzech równań, z których pierwsze daje od razu $c=-1$, a dalej wyliczamy $a=0$, $b=1$,odpowiedzią jest zatem wielomian $x-1$.

Zad. 7. Wykonujemy dzielenie, reszta jest stała. Szukamy dzielników reszty???

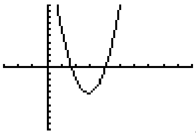
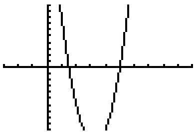
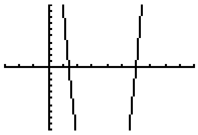
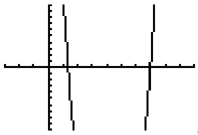
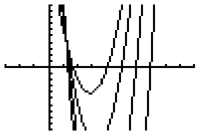
Zad. 8. Tak. Wynika to natychmiast ze wzorów Viète'a.

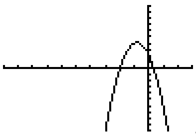
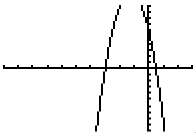
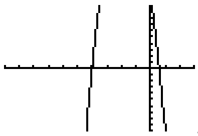
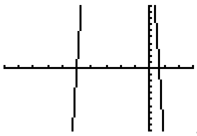
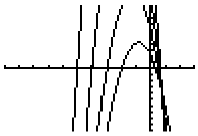
Zad. 9. $\Delta = b^2-4ac \to b^2$, więc wielomian ma w granicy pierwiastki. Niech $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ i $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$. $\sqrt{\Delta} \to \sqrt{b^2} = |b| = -b$. Zatem x_1 to iloraz wyrażenia dążącego do liczby ujemnej przez wyrażenie o wartości ujemnej dążące do zera, więc $x_1 \to \infty$. Natomiast $\lim x_2 = \lim \frac{(-b-\sqrt{\Delta})(-b+\sqrt{\Delta})}{2a(-b+\sqrt{\Delta})} = \lim \frac{2c}{-b+\sqrt{\Delta}} = \frac{2c}{-b-b} = -\frac{c}{b}$.

Zad. 10. a) Rozwiązanie bez kalkulatora

Widać, że dla $m = 1$ otrzymujemy równanie liniowe postaci $-2x+2 = 0$, które ma pierwiastek całkowity 1. Dla $m \neq 1$ obliczamy wyróżnik trójmianu $\Delta = m^4 - 4m^3 + 2m^2 + 4m + 1$. Jeśli zauważymy, że $\Delta = (m^2 - 2m - 1)^2$, jesteśmy w domu. Widać, że wyróżnik jest zawsze nieujemny, a pierwiastek z niego jest całkowity. To zachęca do obliczenia pierwiastków równania kwadratowego ze wzoru. Otrzymujemy (po rachunkach) $x_1 = m$, $x_2 = {}^{m+1}/_{m-1}$. Dla całkowitym wartości m jeden pierwiastek jest zatem zawsze całkowity, a drugi? Metodą zgadywania można sprawdzić, że x_2 jest całkowite dla $m \in \{-1, 0, 2, 3\}$, ale czy to już wszystkie dobre wartości m? Sprawdzanie „na piechotę" wydaje się beznadziejne. Skorzystajmy ze wzorów Viety. Jeśli pierwiastki byłyby całkowite, to ich suma też, zatem całkowite byłoby $x_1 + x_2 = (m^2+1)/(m-1) = m + 1 + {}^{2}/_{m-1}$. Teraz już widać, że $m-1$ musi dzielić 2, czyli należeć do zbioru $\{\pm1, \pm2\}$, co daje $m \in \{-1, 0, 2, 3\}$. Uwaga! Ponieważ otrzymaliśmy te wartości, zakładając, że pierwiastki są całkowite, trzeba wykonać sprawdzenie (tzw. dowód redukcyjny), ale to już wcześniej wykonaliśmy, szukając rozwiązania po omacku. Ostatecznie warunki zadania spełniają wartości m ze zbioru $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$. Bez kalkulatora nic więcej z tego zadania się już nie dowiemy.

b) Rozwiązanie z kalkulatorem graficznym
Na początku sprawnie wykonujemy wykresy $W(x)$ dla różnych m całkowitych (poza m=-1). Na rysunkach m przyjmuje kolejno wartości 4, 5, 6, 7 (i wszystkie na jednym wykresie) oraz -2, -3, -4, -5 (i wszystkie na jednym).W tym zadaniu widać, do czego przydaje się włączenie skalowania osi.

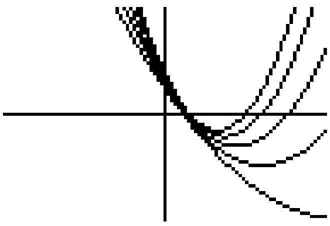
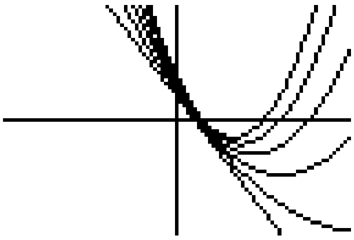

m=4

m=5

m=6

m=7



m=-2

m=-3

m=-4

m=-5


<u>Hipotezy</u> widać jak na dłoni (bez żadnych rachunków):
- dla każdego m=-1 są dwa pierwiastki (tzn. wyróżnik jest dodatni),
- jeden z pierwiastków jest równy m (odczyt ze skalowania lub opcja *intersect*),
- drugi pierwiastek zbliża się do 1 (z prawej strony dla $m \to \infty$, z lewej dla $m \to -\infty$)
- tylko dla $m \in \{-1, 0, 2, 3\}$ drugi pierwiastek jest całkowity.

c) Oczywiście hipotezy nadal wymagają dowodu, ale rachunki są teraz znacznie prostsze niż w rozwiązaniu bez kalkulatora (w szczególności nie obliczamy wyróżnika ani nie używamy wzoru na pierwiastki). Hipotezę drugą uzasadnimy, wyliczając po prostu $W(m)$. Drugi pierwiastek wyliczymy teraz łatwo ze wzorów Viety, bo $m + x_2 = m + 1 + {}^{2}/_{m-1}$. czyli $x_2 = 1 + {}^{2}/_{m-1}$, a to dowodzi natychmiast pozostałych trzech hipotez. Możemy też tym łatwym sposobem odpowiedzieć na znacznie ogólniejsze i trudniejsze pytanie: dla jakich m <u>rzeczywistych przynajmniej jeden</u> pierwiastek równania $W(x) = 0$ jest całkowity.

d) Oglądamy wykresy $W(x)$ dla m bliskich 1. Na wykresie poniżej $m \in \{1,5; 1,4; 1,3; 1,2; 1,1\}$.

Z tych obserwacji wynika, że parabole rozginają się / rozprostowują się. Istotnie, coraz bardziej przylepiają się do prostej $y = -2x+2$ (jest zaznaczona na drugim rysunku). Podobny efekt można zaobserwować, gdy m zbliża się do 1 od strony lewej tzn. $m \in \{0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9\}$. Oglądamy tu zbieżność ciągu funkcji i można to pojęcie zobaczyć na długo przed formalnym wprowadzeniem definicji tego pojęcia.

Wnioski METODYCZNE. Zadanie pokazuje rolę kalkulatora w nauczaniu i w rozwiązywaniu zadań.
- przerzucamy istotę działań z rachowania na eksperymentowanie i wnioskowanie; rachunki mogłyby być za trudne dla słabszych uczniów, a z kalkulatorem każdy ma szanse na rozwiązanie ze zrozumieniem;
- odkrywamy nowe aspekty zadania, uogólniamy problem;
- stawiamy nowe problemy matematyczne, które w tradycyjnym rozwiązaniu umykały naszej uwadze lub w ogóle nie dały się zauważyć;
- uczeń nie tylko wykonuje polecenia zawarte w zadaniu, ale staje się odkrywcą nowych faktów, formułuje i dowodzi hipotezy, widzi potrzebę dowodu, rozumie, po co dowodzi się twierdzenia; staje się badaczem.

Zad. 11. a) $x^2f^2(x)+1 = 2xf(x)$, zatem $(xf(x)-1)^2 = 0$, czyli $xf(x) =1$, ale dla $x=0$ żadna funkcja tego nie spełnia.

b) $f(x+y)-2f(xy)-3f(x)+(2x^2-1)f(y) = 2x(xy-1)$
Niech $x = y = 0$. Mamy $f(0) - 2f(0) - 3f(0) - f(0) = -5$, skąd $f(0)=1$.
Niech $y=0$. Mamy $f(x)-2f(0)-3f(x)+(2x^2-1)f(0) = -2x-5$, skąd $-2f(x) = -2x^2-2x-2$, czyli $f(x) = x^2+x+1$.
Konieczne jest sprawdzenie!

c) $f(x^3) = x^9+5$, czyli $f(x) = f(\sqrt[3]{x^3}) = \sqrt[3]{x}^9 +5 = x^3+5$**. Konieczne sprawdzenie!**

d) $f(x+y) = f(x)+y$, skąd wnioskujemy, że dla dowolnego h zachodzi $^1/_h(f(x+h)-f(x)) = 1$, zatem punkty o współrzędnych $(x, f(x))$ oraz $(x+h, f(x+h))$ leżą na prostej równoległej do prostej $y=x$, a stąd $f(x) = x + c$.
Należy wykonać sprawdzenie.

W przesłanych rozwiązaniach najczęstszym błędem był brak sprawdzenia. Warunki zadania mogą być przecież sprzeczne. Przejścia nie są równoważne. Można wprowadzić pierwiastki obce.

Zad. 12. Mamy $f(b) = ab+b = b(a+1)$ i $f(b) = 2020a$, czyli $2020a = b(a+1)$, skąd $b = 2020a/(a+1)$. Ponieważ NWD$(a, a+1) = 1$, musi zachodzić $a|2020 = 2^2\cdot 5\cdot 101$. Jest 12 możliwych wartości a, dla których b jest całkowite.

Zad. 14. Funkcje f i g spełniające równanie $2f(x)-3g(y) = 2x^2+xy+3y^2-1$ nie istnieją, bowiem dla $y=1$ mamy $2f(x) = 3g(1)+2x^2+x+2$, a dla $y=0$ mamy $2f(x) = 3g(0)+2x^2-1$. Po odjęciu równań stronami mamy $x = 3g(0)-3g(1)-3$, a to jest stałe (dla każdego x).