Geometria analityczna

a) opis zjawiska

Celem obliczeń nie są same liczby, lecz ich zrozumienie.
Richard Hamming

Zad. 1. Po jeziorze Gopło żeglują dwa statki pasażerskie: Alina i Balladyna. W południe Alina była 15 km na północ od Balladyny i poruszała się na południe z prędkością 15km/h. Balladyna natomiast poruszała się na wschód z prędkością 11 km/h. Jaka była odległość między statkami o 13:00, a jaka o 14:00? Opisz wzorem odległość statków od południa do 16:00. Naszkicuj wykres tej funkcji. Mgła tego dnia była tak duża, że ograniczała widoczność do 8 km. Czy kapitan Aliny zauważy Balladynę przed godziną 16:00?

Zad. 2. Główny pas startowy na lotnisku w Concordville ma długość 2 km i ciągnie się z południa (od punktu *S*) na północ (do punktu *N*). Samoloty lądują na tym lotnisku od strony południowej. Po przyziemieniu w punkcie *T* samolot zaczyna od razu hamować. W punkcie *P* umieszczony jest kolorowy marker. Gdy samolot hamuje, jego odległość s od punktu *S* jest dana wzorem $s=c+100t - 4t^2$, gdzie *t* to czas w sekundach od przyziemienia, a *c* to odległość w metrach punktu przyziemienia *T* od południowego końca lotniska. Samolot po raz pierwszy dotknął ziemi 800 m od punktu *S* i minął marker *P* z prędkością 36m/s. Oblicz:
a) odległość *c*,
b) odległość pokonaną przez samolot w ciągu pierwszych 5 sekund po przyziemieniu,
c) prędkość 5 sekund po przyziemieniu,
d) czas po przyziemieniu, po jakim samolot minął marker,
e) Odległość markera od południowego końca pasa startowego.
Uzasadnij, że samolot, który przyziemił zanim minął punkt *P*, może bezpiecznie zatrzymać się na tym pasie startowym. Co powinien zrobić pilot, jeśli nie zedołał przyziemić przed *P*?

b) opis kształtu

Pion i poziom mają ze sobą krzyż.
folklor

Zad. 1. Dobierz „wygodnie” układ współrzędnych i opisz w nim:
a) wierzchołki kwadratu/sześcianu/hipersześcianu
b) boki kwadratu/krawędzie sześcianu/krawędzie hipersześcianu
c) ściany płaskie kwadratu/sześcianu/hipersześcianu
d) przekątnej kwadratu/sześcianu/hipersześcianu
e) przekątnych ścian płaskich sześcianu/przekątnych ścian sześciennych hipersześcianu

Zad. 2. Podaj równanie analityczne na płaszczyźnie (kartezjańskie, parametryczne, biegunowe lub wektorowe):
a) prostej, półprostej, odcinka, prostokąta
b) okręgu, koła, elipsy, rozety z okręgów
c) trójkąta równobocznego, pięciokąta foremnego, gwiazdy sześcioramiennej, siedmiokąta gwiaździstego,
d) spirali rozwijającej się / zwijającej się,
e) trójliścia, pięcioliścia,
f) ruchu wypadkowego punktu drgającego w prostopadłych kierunkach z różnymi częstościami,
g) ruchu wypadkowego punktu poruszającego się po okręgu, którego środek porusza się po większym okręgu,
h) konchoidy prostej i okręgu.

Zad. 3. Podaj równanie analityczne w przestrzeni (kartezjańskie, parametryczne, biegunowe lub wektorowe):
a) prostej, półprostej, odcinka,
b) płaszczyzny, półpłaszczyzny, prostokąta,
c) walca kołowego o osi pokrywającej się z osią *OZ*/*OX*/*OY*,
d) walca eliptycznego, parabolicznego,
e) stożka kołowego,
f) linii spiralnej na walcu/stożku,
g) koryta parabolicznego stycznego do osi *OX*/*OY*,
h) toni falistej przy wietrze wiejącym ze wschodu / z północy / z północnego wschodu

c) rachunek wektorów

Co mówi matematyk, kiedy widzi nisko przelatujące wektory?
Pewnie gdzieś tu mają bazę.

folklor

Zad. 1. Czy punkty *A*, *B* i *C* są współliniowe, jeśli ***OA*** = 10***a***, ***OB*** = 5***b***, ***OC*** = 4***a***+3***b***?

Zad. 2. Dane są punkty *A*, *B*, *C*, *D* takie, że: **AB** = ***DC*** i ***BC***+***DA*** = **0**. Jaką figurę tworzą punkty *A*, *B*, *C*, *D*?

Zad. 3. a) Podaj równanie prostej przechodzącej przez punkt (4, -1) i równoległej do wektora $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

b) Podaj równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt (4, -1, 1) i równoległej do wektora $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Zad. 4. Jaki jest kąt między wektorami $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix}$? A jaki między $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix}$?

Zad. 5. Pozycja okrętu *Argonautus* opisana jest równaniem wektorowym: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 28 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix}$, gdzie *t* jest czasem w godzinach liczonym od południa. Gdzie znajduje się okręt o 13.00? Z jaką prędkością i szybkością się porusza? Jakie jest kartezjańskie równanie jego toru ruchu? Barka *Bodicea* stoi zacumowana w punkcie, którego wektor pozycyjny to [18,4]. Czy statki zderzą się, jeśli *Argonautus* nie zmieni kursu? Jeśli tak, to o której? Na wypadek, gdyby miały się jednak zderzyć, *Bodicea* ruszyła o 13.00 z prędkością (w km/h) opisaną wektorem [5, 12]. Opisz pozycję barki po czasie *t*. Jak daleko znajdą się statki o 15.00?

Zad. 6. Dwie brygady kładą kabel na pustyni w kierunku N-S. O 6.00 wyruszają z obozowiska w punkcie (0,0). Pierwsza jedzie jaguarem z prędkością [18, 24] km/h, a druga -gepardem z prędkością [36, -16] km/h. Z jaką szybkością porusza się każdy samochód? Gdzie znajdują się samochody o godz. 6.30? W jakiej są wtedy odległości ? O 6:30 brygada z geparda przerywa podróż i zaczyna kłaść kabel na północ. Załoga jaguara jedzie dalej ze swoją prędkością aż znajdzie się dokładnie na północ od poprzedniej. O której godzinie II ekipa zaczyna pracę? Każda ekipa kładzie średnio 800 m kabla na godzinę. Jaka odległość dzieli brygady w porze lunchu o 11.30?

Zad. 7. Niech $\vec{a}$ = [1, 2, 3], $\vec{b}$ = [-3, 4, 2]. Co oznaczają napisy:
a) $-0{,}25\ \vec{a} + 1{,}25\ \vec{b}$, **b)** $(1-t)\ \vec{a} + t\ \vec{b},\ t \in \langle 0, 1\rangle$ **c)** $t\ \vec{a} + (1-t)\ \vec{b},\ t \in \langle 0, 1\rangle$ **d)** $(1-t)\ \vec{a} + t\ \vec{b},\ t \in (-\infty, +\infty)$
e) $(1-t)\ \vec{a} + t\ \vec{b},\ t \in \langle 2, 3\rangle$ **f)** $\vec{a} + 3 \cdot [\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), 0],\ t \in \langle 0, 1\rangle$ **g)** $(1-t^2)\ \vec{a} + t^2\ \vec{b},\ t \in \langle 0, 1\rangle$
h) $\vec{a} + (-2) \cdot [1, \cos(2\pi t), \sin(2\pi t)],\ t \in \langle 0, 2\rangle$ **i)** $\vec{a} + 10\ [\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), 0] + 0{,}1\ [\cos(8\pi t), 0, \sin(8\pi t)],\ t \in \langle 0, 6\rangle$
j) $\sin^2(2\pi t)\ \vec{a} + \cos^2(2\pi t)\ \vec{b},\ t \in \langle 0, 1\rangle$ **j*)** $\sin(2\pi t)\ \vec{a} + \cos(2\pi t)\ \vec{b},\ t \in \langle 0, 1\rangle$ **k)** $2\vec{a} + t\ \vec{b},\ t \in \langle 0, 1\rangle$
Dla ułatwienia zrób najpierw wersje 2-wymiarowe tych zadań, wstaw kilka konkretnych wartości *t*, rób rysunki.

d) opis przekształcenia

Matematycy są jak Francuzi: cokolwiek im się powie,
od razu przekładają to na swój własny język
i wówczas staje się to zupełnie czymś innym.

J. W. Goethe

Zad. 1. Punkt *A* ma współrzędne (6, -2), a punkt *B* - (2, 6). *B* jest obrazem *A* w pewnej symetrii osiowej. Względem jakiej prostej?

Zad. 2. Co to za przekształcenia?
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$,
$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

Zad. 3. Zapisz macierze podanych przekształceń.
a) symetria względem osi *OY*,
b) obrót względem punktu (0, 0) o 90°,
c) powinowactwo prostokątne względem osi *OX* o skali 2,
d) symetria względem prostej *y*=2*x*,
e) jednokładność o środku (0, 0) i skali 3,
f) pochylenie osi *OY* układu współrzędnych tak, aby tworzyła kąt 60° z osią *OX*,
g) złożenia powyższych przekształceń.

Zad. 4. Przekształcenie liniowe o macierzy *P* przekształca punkt (1, 0) na (0, -1/2) i punkt (0, 1) na (2, 2). Znajdź macierz tego przekształcenia. Pokaż, że punkt (6, 3) jest jego punktem stałym. Czy jest to jedyny taki punkt? Co to za przekształcenie?

Zad. 5. Przekształcenie *T* zadane jest wzorem: $T\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}6 & -0{,}8 \\ 0{,}8. & 0{,}6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Opisz je dokładnie. Pokaż, że (2, -1) jest niezmienniczym punktem tego przekształcenia.

Zad. 6. Czworokąt *OABC* przeszedł w powyższym przekształceniu na *O'A'B'C'*, gdzie *O'*=(0, 0), *A'*=(4, 3.5), *B'*=(6, 6.4), *C'*=(2, 3). Znajdź współrzędne punktów *O, A, B, C*. Co to za wielokąt? Jak zmienia się jego pole po przekształceniu?

Zad. 7. Dane są przekształcenia liniowe: *R* obrót o 45° wokół punktu (0, 0), *S* jednokładność o skali $\sqrt{2}$ i środku w (0, 0). Zapisz macierze tych przekształceń. Co jest obrazem prostej y=2x po złożeniu tych przekształceń? Czy zależy to od kolejności złożenia?

Zad. 8. Znajdź macierz *Q* taką, że dla wszystkich wektorów [*x*, *y*] będzie zachodzić: $Q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix}$.

Zad. 9. Dane są przekształcenia płaszczyzny $M=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ i $N=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Znajdź macierz opisująca ich złożenie. Co się dzieje z polem przekształconego przezeń kwadratu?

Zad. 10. Co jest obrazem prostej y=2x+1 w przekształceniu liniowym $T=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$?

e) opis powierzchni

Zwyczajny człowiek po wypiciu dwóch setek widzi podwójnie.
Ile musiał wypić Hilbert, żeby zobaczyć przestrzenie nieskończeniewielowymiarowe!
Grzegorz Gut

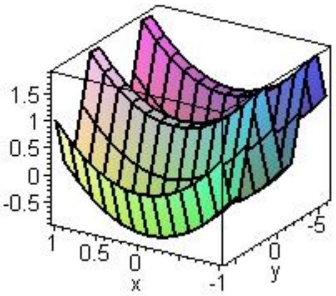
Zad. 1. Oblicz kilka wartości funkcji i określ dziedzinę funkcji: **a)** $z = xy$; **b)** $f(x, y) = \sqrt{x+y}$; **c)** g(x, y) = (sin$x$)$^{-1}$ + y.

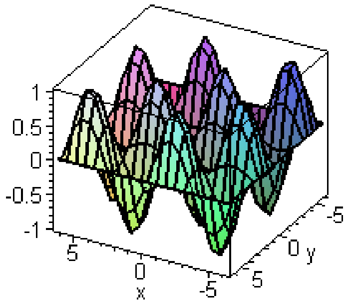
Zad. 2a. Znajdź "cięcia" funkcji dla kilku wartości x: PRZYKŁAD: $z = 2\,(x + y^2)$: dla x=3: $z = 2y^2 + 6$, dla x=–1: $z = 2y^2 - 2$.
a) $z = xy$; **b)** $f(x,y)=\sqrt{x+y}$; **c)** g(x, y) = $\sqrt{x^2+y^2}$, **d)** $z = x^2y$; **e)** $z = xy^2$; **f)** $z = x^2y$; **g)** g(x, y) = (sin$x$) + y.

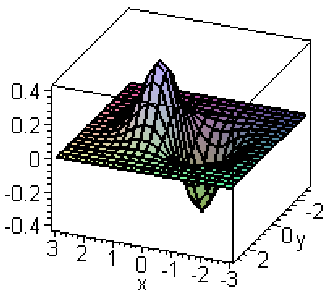
Zad. 2b. Znajdź "cięcia" funkcji dla kilku wartości y: PRZYKŁAD: $z = 2\,(x + y^2)$: dla y=3: $z = 2x + 18$, dla y=–1: $z = 2y^2 + 2$.
a) $z = xy$; **b)** $f(x, y) = \sqrt{x+y}$; **c)** g(x, y) = $\sqrt{x^2+y^2}$, **d)** $z = x^2y$; **e)** $z = xy^2$; **f)** $z = x^2y$; **g)** g(x, y) = (sin$x$) + y.

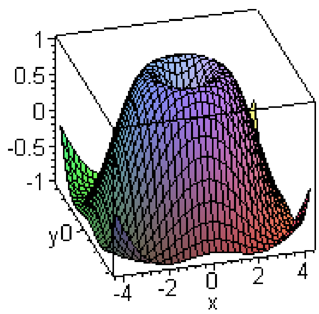
Zad. 2c. Znajdź "poziomice" funkcji dla kilku wartości z: PRZYKŁAD: $z = 2\,(x + y^2)$: dla z=4: $4 = 2(x + y^2)$, czyli $x = 2 - y^2$
a) $z = xy$; **b)** $f(x, y) = \sqrt{x+y}$; **c)** g(x, y) = $\sqrt{x^2+y^2}$, **d)** $z = x^2y$; **e)** $z = xy^2$; **f)** $z = x^2y$; **g)** g(x, y) = (sin$x$) + y.

Zad. 3. Podpisz odpowiednio wykresy następującymi wzorami: $xe^{-x^2-y^2}$, sin($\sqrt{x^2+y^2}$), sin x · sin y, x^2 + sin y.
Naszkicuj po kilka poziomic tych funkcji.









Zad. 4. Podaj przepis funkcji dwóch zmiennych *x*, *y*, której wykres to:
a) "góra" w kształcie stożka, **b)** "fale morskie przy wietrze północnym", **c)** "fale morskie przy wietrze wschodnim",
d) "fale morskie przy wietrze południowo-zachodnim" **e)** "kręgi (fale) na wodzie po wrzuceniu kamienia" **f)** "tsunami".
g) "spadzisty dach domu" **h)** "pagoda", **i)** "kołyska", **j)** płaszczyzna. **a)** półkula.

Zad. 5. Podpisz odpowiednio wykresy następującymi wzorami $z=\sqrt{|y|}-\sqrt{|x|}$, $z=-\sqrt{|xy|}$, $z=y(3x^2-y^2)$, $z=y\sqrt{|x|}$
Postaw pytania dotyczące "rzeźby terenu" tych wykresów. Jak na nie odpowiedzieć?