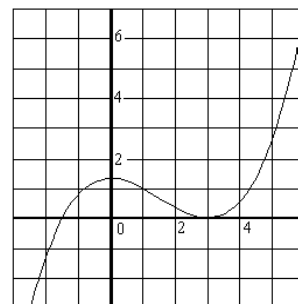


## Lista 13 – Pochodne

### a) Oswajanie definicji

1. Niech  $f(x) = x^2 - x + 1$  i  $x_0 = 1$ . Znajdź równania siecznych funkcji  $f$  przechodzących przez punkt  $(x_0, f(x_0))$  i:

- a)  $(2, f(2))$     b)  $(1,5; f(1,5))$     c)  $(1,1; 1,11)$     d)  $(1,01; f(1,01))$     e)  $(1,001; f(1,001))$   
 f) nachylonej do osi  $OX$  pod kątem  $46^\circ$ ;    g) nachylonej do osi  $OX$  pod kątem  $44^\circ$ ;



2. Odczytaj z wykresu przybliżoną wartość.

- a)  $f'(-2)$     b)  $f'(-1)$     c)  $f'(1,5)$     d)  $f'(3)$     e)  $f'(5,5)$     f)  $f'(9)$

3. Poniższy rachunek uzasadnia, że pochodna funkcji ... w punkcie ... jest równa ....

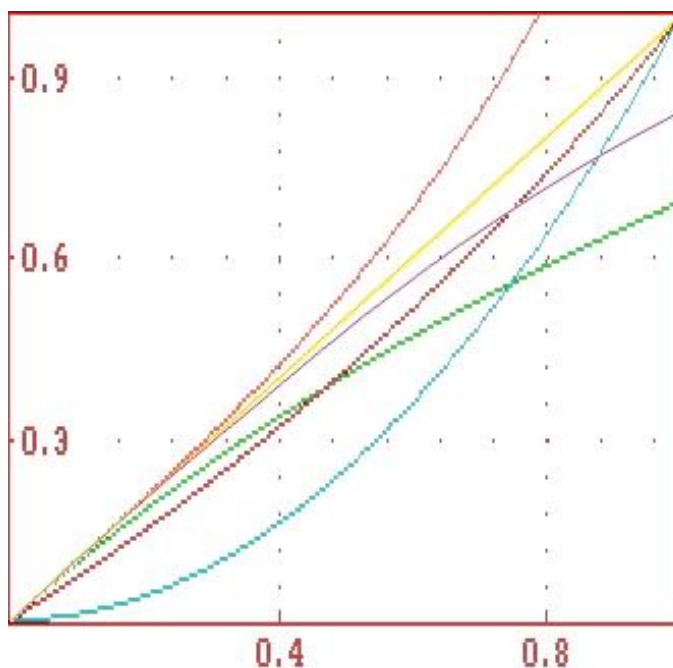
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x^3} - 8}{x - 4} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x^3} - 8}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x^3} - 8) ((\sqrt{x})^2 + \sqrt{x} \cdot 2 + 2^2)}{(\sqrt{x} + 2) ((\sqrt{x})^2 + \sqrt{x} \cdot 2 + 2^2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x^3} - 8) ((\sqrt{x})^2 + \sqrt{x} \cdot 2 + 2^2)}{(\sqrt{x} + 2) ((\sqrt{x})^3 - 2^3)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x})^2 + \sqrt{x} \cdot 2 + 2^2}{\sqrt{x} + 2} = \frac{(\sqrt{4})^2 + \sqrt{4} \cdot 2 + 2^2}{\sqrt{4} + 2} = 3 \end{aligned}$$

4. Znajdź kąt, jaki tworzy styczna do wykresu z osią  $OX$  dla danych funkcji i wartości zmiennej  $x$ .

- a)  $2x - 4x^3, x = 2$     b)  $\sin x, x = \pi$     c)  $\sin x^2, x = \pi$     d)  $\sin^2 x, x = \pi$     e)  $\operatorname{tg}(2x - 4x^3), x = 2$

5. Uporządkuj następujące funkcje zgodnie z szybkością wzrostu w punkcie  $x = 0$ .

- a)  $x$     b)  $\sin x$     c)  $\operatorname{tg} x$     d)  $\ln(x-1)$     e)  $x^2$     f)  $2^x - 1$



### b) Zastosowania techniczne

- Wyznacz styczną do okręgu  $x^2 + y^2 = 4$  w punkcie  $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$  i kąt, jaki ten okrąg tworzy z prostą  $y = \sqrt{2}$ .
- Pod jakim kątem prosta  $y = \sqrt{2}$  przecina okrąg:  $x^2 + y^2 = 4$ ? A jaki jest kąt między wykresami  $y = x^2$  i  $y = x^3$ ?
- Oblicz kąt między:
  - okręgami  $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 16$  i  $x^2 + (y-1)^2 = 25$
  - krzywymi  $y = x^2$  i  $y = x^3$
- Jaki punkt krzywej  $y^2 - x^2 = 4$  leży najbliżej punktu  $(2,0)$ ?

5. **Uzupełnij.**

- |                                           |                                     |                                          |                                                 |
|-------------------------------------------|-------------------------------------|------------------------------------------|-------------------------------------------------|
| a) $y = 0,2x + 3, y' = \dots$             | b) $y = 0,2x - \pi, y' = \dots,$    | c) $y = \dots, y' = 5x,$                 | d) $y = \dots, y' = 3x^2,$                      |
| e) $y = \dots, y' = 15x^2,$               | f) $y = \dots, y' = 13x^2,$         | g) $y = \dots, y' = 13x^6 - 0,1x^3,$     | h) $y = (x+2)^{13/7}, y' = \dots,$              |
| i) $y = \dots, y' = \sqrt[7]{(x+3)^5},$   | j) $y = \dots, y' = (x+2)^{1/3},$   | k) $y = \dots, y' = (x+2)^{-1/3},$       | l) $y = \dots, y' = (x^7+5)^{-1/3} \cdot 7x^6,$ |
| ł) $y = \cos 4x, y' = \dots,$             | m) $y = \dots, y' = 17 \cos 4x,$    | n) $y = \cos(x^3), y' = \dots,$          | o) $y = \dots, y' = -4x^3 \sin(x^4),$           |
| p) $y = \dots, y' = \sin(x+3),$           | q) $y = \dots, y' = x \sin(x^2+3),$ | r) $y = \dots, y' = 5(\sin x)^5 \cos x,$ | s) $y = \dots, y' = \sin x \cos x,$             |
| t) $y = \dots, y' = x \sin x^2 + \cos x,$ | u) $y = \ln(x^5+2), y' = \dots,$    | v) $y = \dots, y' = 1/(x+2), x > -2,$    | w) $y = \dots, y' = x^3 / (x^4+1),$             |
| x) $y = \dots, y' = -e^{-x},$             | y) $y = 2^{3x}, y' = \dots,$        | z) $y = \dots, y' = e^{4x},$             | ż) $y = \dots, y' = 5^{4x},$                    |
| zeta) $y = \dots, y' = 5^{4x+7}$          |                                     |                                          |                                                 |

**c) Zastosowania realistyczne**

1. Ze skraju urwiska na wysokości 80 m zrzucono kamień. Jego przemieszczenie w ciągu pierwszych 5 sekund ruchu opisuje funkcja  $s = 5t^2$ . Po jakim czasie kamień upadnie na ziemię? Z jaką prędkością uderzy w ziemię? Po jakim czasie uzyska prędkość 30m/s?
2. Miesięcznie koszty stałe kopalni cennego kruszcu wynoszą 8 (w tys. talarów), a wydobycie  $x$  ton kosztuje  $\frac{1}{5} \left(\frac{x}{10}\right)^3 - \frac{x}{10} + 4$  (tys. talarów). Przy jakim wydobyciu średni koszt jest najmniejszy (tj. przypadający na jedną tonę kruszcu)?
3. Jaki największy wigwam (co do objętości) można zrobić z koła o promieniu  $R$ ?
4. Jakie największe pudełko można wykonać z kartki brystolu A4?
5. Kartkę papieru podpalono w środku i wypala się w niej okrągła dziura. Po  $t$  sekundach jej promień jej promień zwiększa się w tempie 0,5 cm/s. W jakim tempie zmienia się pole, gdy  $r=5$  cm?
6. Z kulistego balonu schodzi powietrze i jego promień po  $t$  godzinach opisuje zależność  $r = 2 + t^{-0,5}$ . W jakim tempie zmieniała się a) powierzchnia, b) objętość balonu po czwartej godzinie?
7. Plama oleju napędowego w kształcie koła rozlewa się po jezdni. Ma promień  $r$  i pole  $A$ . Naskicuj wykres  $A$  w zależności od  $r$ . W pewnej chwili jej promień osiągnął 60 cm. Znajdź wartość  $dA/dr$ . Jeśli promień rośnie w tempie 2 cm/min, to w jakim tempie powiększa się pole plamy?
8. Sześcienna bryła lodu topi się, a jej objętość maleje w tempie 12 cm<sup>3</sup>/s. W jakim tempie zmniejsza się długość krawędzi sześciianu, gdy objętość lodu wynosi 125 cm<sup>3</sup>?