

Lista 14 – Kombinatoryka

A) GEOMETRIA

1. Ile jest przekątnych w 17-kącie wypukłym? Ile przekątnych ma 12-ścian foremny?
2. W graniastosłupie prawidłowym 200-kątnym wybrano losowo jedną z przekątnych ścian. Ile przekątnych ścian tego graniastosłupa jest do niej równoległych?

B) ARYTMETYKA

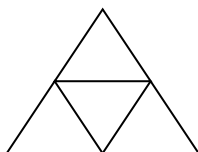
3. Ile dzielników ma liczba $18^{12} \cdot 12^{18} \cdot 31 \cdot 2^{2019} \cdot 3^{2020}$?
4. Ile zer znajduje się na końcu liczby $2020!$?
5. Ile razy jedynka pojawia się wśród liczb od jeden do miliona?
6. Ile jest liczb czterocyfrowych podzielnych przez 5 o cyfrach nie przekraczających 7?
7. Ile jest liczb parzystych większych od 2000 złożonych z cyfr 1, 2, 3, 4?

C) LINGWISTYKA

8. Ile różnych słów (niekoniecznie mających sens) można ułożyć z liter słowa BOTANIK? A ile z liter słowa GEOLOG? Ile z nich zaczyna się od samogłoski? Ile zaczyna się od A? W ilu dwie litery G stoją jedna obok drugiej? W ilu wszystkie samogłoski stoją w jednej grupie?
9. Wybierz właściwe słowo.
 - a) Sześć różnych PERMUTACJI / KOMBINACJI / WARIACJI trzech przedmiotów tworzy jedną PERMUTACJĘ / KOMBINACJĘ / WARIACJĘ.
 - b) Jeśli P_1 i P_2 są PERMUTACJAMI / KOMBINACJAMI / WARIACJAMI pewnych obiektów, których liczby wynoszą odpowiednio p_1 i p_2 , to P_1 i P_2 są ZALEŻNE / NIEZALEŻNE / WZAJEMNIE WYKLUCZAJĄCE SIĘ, jeśli liczba łącznych PERMUTACJI / KOMBINACJI / WARIACJI P_1 i P_2 wszystkich obiektów jednocześnie wynosi $p_1 \times / + p_2$.
 - c) W zadaniach dotyczących jednego lub drugiego zbioru obiektów stosuje się ILOCZYN / SUMĘ liczby permutacji, a w zadaniach (nie)dotyczących ALBO /ANI jednego ALBO /ANI drugiego zbioru obiektów stosuje się ILOCZYN / SUMĘ liczby permutacji.
10. Uzupełnij brakujące słowa.
 - a) Zbiór 5 różnych czasopism na wystawie w kiosku wybranych przez kioskarkę z hurtowni stanowi jedną a ich ułożenie na półce daje jedną z wielu (ilu?)
 - b) Jeśli rozważamy liczbę opisujących, na ile sposobów z piwniczki zawierającej 30 butelek z różnymi gatunkami wina i 15 puszek różnych gatunków piwa możemy wybrać 3 butelki wina i 10 puszek piwa, widzimy, że butelek wina nie ma na wybór, czyli te dwie są
 - c) Butelki z winem z punktu b) mogą być wybrane na sposobów, a puszki z piwem na, zatem jest sposobów zaopatrzenia gości w napoje wysokokowe z piwniczki.
11. Uzupełnij wedle uznania, byle całość miała sens.
 - a) Do problemów kombinatorycznych podchodzić z dużą, bo
 - b) Sposób obliczania liczby permutacji obiektów jakiegoś zbioru w jednoczesnym zestawieniu z permutacjami obiektów ze zbioru niezależnego rozszerzony na więcej niż dwa zbiory, ale do kombinacji tych obiektów.
 - c) Kiedy zliczamy ustawienia pewnych obiektów obiektu, którego wybór jest ograniczony warunków.
 - d) Jeśli mamy do dyspozycji n obiektów, spośród których mamy wybrać r , to liczbę możliwych wyborów opisuje iloraz liczby r obiektów spośród n i liczby r obiektów między sobą.

D) PLASTYKA

12. Na ile sposobów można pokolorować ten rysunek dwoma kredkami, tak aby każdy mały trójkąt był jednokolorowy?



E) KOMBINATORYKA

13. W biegu na 100 m przez płotki startuje 6 zawodników. Ile jest sposobów ustalenia ich kolejności na mecie?
14. Ile jest numerów telefonicznych sześciocyfrowych zaczynających się na 3 lub 7? Ile z nich:
 a) ma wszystkie cyfry różne?
 b) używa tylko 3 różnych cyfr?
15. Rzucamy dwiema kostkami do gry – zieloną i czerwoną. Na ile sposobów możemy wyrzucić sumę oczek równą 6?
16. Na ile sposobów w 20 osobowej klasie można wybrać 5 osób do samorządu? A jeśli w samorządzie mają być 3 dziewczynki i 2 chłopcy? (Dziewcząt w klasie jest 8. Dlaczego nie ma tej informacji w treści zadania?)
17. Premierzy Czwórki Wyszechradzkiej spotkali się na konferencji. Na ile sposobów można ich usadzić:
 a) na ogrodowej ławie?
 b) na huśtawkach typu *see-saw*?
 c) przy okrągłym stole?
 d) przy kwadratowym stole?
 e) przy prostokątnym stole? Czy proporcje tego stołu mają znaczenie?
18. W pudełku znajduje się 7 kul bilardowych (3 czerwone, 2 czarne i po jednej białej i zielonej). Na ile sposobów można z pudełka wyciągnąć 3 bile?
19. W każdej z poniżej opisanych sytuacji określ, czy mamy do czynienia z obliczeniem liczby permutacji, kombinacji czy wariacji.
 a) Ile jest różnych ustawień liter Q, W, E, R, T, Y? Dlaczego wybrano te litery?
 b) Ile różnych drużyn siatkarskich (6-osobowych – tego nie ma w treści zadania) można wybrać z grupy ośmiu wszechstronnych zawodników?
 c) Ile różnych zestawów książek może zabrać ze sobą zesłaniec na bezludną wyspę, jeśli wolno mu zabrać 8 sztuk z jego unikatowej kolekcji liczącej 100 pozycji?
 d) Na ile sposobów mogą być rozdane fanty z loterii, jeśli nagrody I, II i III stopnia są przyznawane przez ciągnięcie losów z nazwiskami 500 unikatowych uczestników loterii.

F) PROBABILISTYKA

20. Z 30 balonów, jakie ma do dyspozycji, pan Dymacz musi na balu nadmuchać 2. Wybiera je losowo i nadmuchuje. Ma 3 podejścia. Nie wie, że 4 spośród balonów są uszkodzone. Jakie jest prawdopodobieństwo, że Dymacz wypełni zadanie? Rozwiąż zadanie, używając drzewa i kombinatorycznie.
21. W babcinej szafie znajduje się 15 par rękawiczek, każda para w innym kolorze, ale wszystkie wymieszane. Po kryjomu (tzn. w całkowitej ciemności) wyciągamy z szafy 4 rękawiczki. Jakie jest prawdopodobieństwo, że uda nam się skompletować:
 a) dwie pary b) jedną parę c) dokładnie jedną parę d) zero par
 e) każda rękawiczkę inną f) każdą rękawiczkę w innym kolorze.
22. Urna A zawiera 3 bile białe i 4czerwone. Z urny wyciągnięto dwie bile. Znajdź prawdopodobieństwo, że obie były białe. Czy to ma znaczenie, czy bile ciągnięto jednocześnie, czy jedną po drugiej?
 Urna B zawiera 4 bile białe i 3 czerwone. Rzucamy kostką do gry. Jeśli wypadnie 1 lub 2, wyciągamy 2 bile z urny A, w przeciwnym razie ciągniemy je z urny B. Jakie jest prawdopodobieństwo, że obie są białe? Jeśli wyciągnięte bile są białe, jakie jest prawdopodobieństwo, że pochodzą z urny A?

G) ALGEBRA

23. Która z liczb jest większa?

a) $\binom{100}{20}$ czy $\binom{100}{30}$ b) $\binom{100}{40}$ czy $\binom{100}{55}$

24. Uzasadnij (na kilka sposobów) równości:

a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ b) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ c) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$

25. Znajdź rozwinięcie dwumianu $(3+x)^4$. Dla jakich wartości x zachodzi: $(3+x)^4 = x^4 + 12x^3 - 54x - 27$.

26. Jaki wyraz rozwinięcia $(1+x^3)\left(\frac{5}{x^2} - 2x\right)^6$ nie zawiera x ?

27. Stałe wyrazy rozwinięć $\left(px^3 + \frac{q}{x^3}\right)^8$ i $\left(px^2 + \frac{q}{x^2}\right)^4$ są jednakowe, a liczby p i q są dodatnie. Jaka jest zależność między p i q ?

F) CHALLENGE:

28. W grze Lotto skreśla się 6 liczb z 49. Ile kuponów należy wypełnić, aby mieć pewność, że trafimy co najmniej jedną trójkę? Przedstaw rachunki i krótko uzasadnij odpowiedź