Lista nr 2 – Średnie (1)

Spis zagadnień (cele)

1) Wiedza intuicyjna uczniów, czyli średnie na co dzień: średnia płaca, średnia prędkość, średnia miesięczna i średnia roczna, środek jako rodzaj średniej (odcinka, trójkąta).
2) Wypracowanie formalnej i ogólnej definicji. Jakie cechy ma wielkość jest średnia? Często stosowane rodzaje średnich (arytmetyczna, geometryczna, harmoniczna, kwadratowa dwóch i więcej liczb). Czy są inne średnie?
3) Nierówności między średnimi – czy i dlaczego zachodzą; dowody algebraiczne i geometryczne.
4) Średnie w różnych działach matematyki (arytmetyka, algebra, geometria, nauka o funkcjach, fizyka).
5) Zastosowanie nierówności między średnimi do dowodzenia różnych twierdzeń.

- -

Uwaga! W rozważaniach używamy tylko liczb rzeczywistych dodatnich. Zastanów się, dlaczego.

Zad. 1. Odpowiedz na pytania dotyczące średnich. Jaką informację dają takie średnie, a jakiej nie dają?
a) Co to jest średnie pensja w zakładzie pracy? Podaj przykłady skrajnie różnych sytuacji o tej samej średniej.
b) Co to jest średnia prędkość ruchu? Podaj przykłady różnych typów ruchu o tej samej średniej.
c) Po co i w jaki sposób oblicza się średnią temperaturę miesięczną i roczną (konieczność zastosowania tzw. średniej ważonej).
d) Środek figury (geometryczny lub środek ciężkości). Współrzędne środka jednorodnego odcinka lub trójkąta (oraz dwóch/trzech jednakowo obciążonych punktów i samego brzegu trójkąta). Współrzędne środka ciężkości układu trzech punktów obciążonych w różny sposób (znowu średnia ważona współrzędnych – stąd nazwa).

Zad. 2. Janek obliczył średnią liczb 12,34, 12,021, 11,92, 11,95, 12,2 w taki sposób:

$12 + \frac{1}{5}(0{,}34 + 0{,}021 - 0{,}08 - 0{,}05 + 0{,}2) = 12 + \frac{1}{5} \cdot 0{,}431 = 12{,}0862$. Czy jest on poprawny?

Uzasadnij. Jest to przykład techniki sprytnych rachunków. Oblicz w ten sposób (w pamięci!):
a) średnią arytmetyczną liczb: 2357,032, 2357,035, 2357,028, 2357,0314.
b) średni wzrost uczniów na podstawie danych z tabeli.

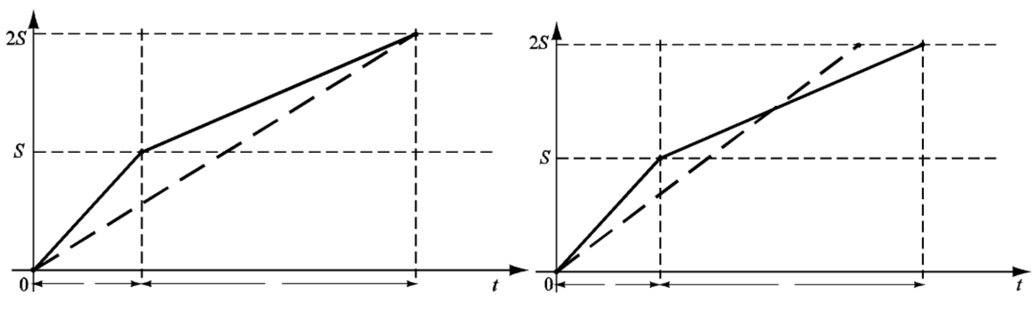
wzrost [m]	liczba uczniów
$a_1 = 1{,}55$	$b_1 = 2$
$a_2 = 1{,}65$	$b_2 = 7$
$a_3 = 1{,}75$	$b_3 = 5$
$a_4 = 1{,}85$	$b_4 = 3$
$a_5 = 1{,}95$	$b_5 = 2$

Zad. 3. Kiedy podróż samolotem z Wrocławia do Warszawy i z powrotem trwa krócej: przy bezwietrznej pogodzie czy przy wietrze wiejącym ze stałą prędkością w kierunku z Wrocławia do Warszawy?
Czy zależy to od prędkości wiatru? Uczniowie często rozumują tak:

$v_1 = v_{\text{samolotu z wiatrem}} = v_{\text{samolotu}} + v_{\text{wiatru}}$ $\quad v_2 = v_{\text{samolotu pod wiatr}} = v_{\text{samolotu}} - v_{\text{wiatru}}$, $\quad v_{sr} = \frac{v_1 + v_2}{2} = v_{samolotu}$, więc średnia prędkość jest taka, jak przy bezwietrznej pogodzie, zatem czasy przelotu są jednakowe.

Ustosunkuj się do tego rozwiązania. Jeśli jest błędne, wytłumacz, na czym polega błąd, a następnie rozwiąż poprawnie. Wykonaj obliczenia dla następujących danych: $v_{\text{samolotu}} = 700$ km/h, $v_{\text{wiatru}} = 100$ km/h, odległość W-w – W-wa $S = 500$ km.

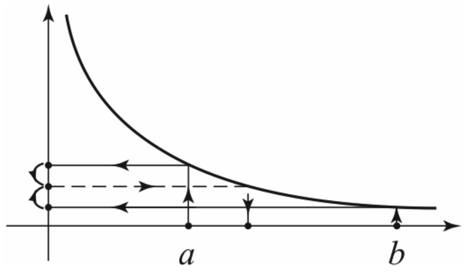
Zad. 4. Poniższe diagramy dotyczą sytuacji z zadania 3. Co oznacza linia ciągła, a co przerywana? Gdzie należy oznaczyć czasy przelotów w jedną i drugą stronę? Który diagram jest poprawny? Który ilustruje rozwiązanie ucznia? Skomentuj.



Uwaga! Zwróć uwagę na możliwość wprowadzenia pracy w grupach przy rozwiązywaniu kolejnych zadań. Dlaczego jest to optymalny sposób pracy nad podanymi zagadnieniami? W jaki sposób tę pracę efektywnie zorganizować?

Zad. 5. Przypomnij definicje różnych średnich (arytmetycznej, geometrycznej, harmonicznej, kwadratowej) dla dwóch oraz dla *n* liczb dodatnich. Gdzie na osi liczbowej wypada średnia arytmetyczna dwóch liczb? A *n* liczb? A gdzie wypadają inne średnie? Dlaczego o każdym z tych wyrażeń możemy powiedzieć, że jest średnią wybranych argumentów?

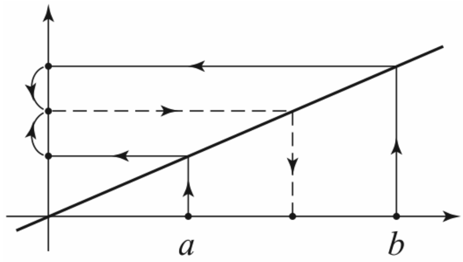
Zad. 6. W matematyce są znane ciągi arytmetyczne, geometryczne, a także ciąg harmoniczny i ciąg kwadratów. Czy to tylko zbieżność nazw, czy też mają one jakiś związek z odpowiednimi średnimi? Zbadaj ten problem. Jak można ogólnie zdefiniować ciągi harmoniczne i kwadratowe? Podaj przykłady takich ciągów.



Zad. 7. Konstrukcję średniej harmonicznej dwóch liczb przedstawia rysunek obok. Jest to wykres funkcji $y = 1/x$ (czy można wykorzystać do tego inną funkcję?). Zaczynamy od danych liczb a i b. Następnie na osi OY bierzemy średnią arytmetyczną wartości w tych punktach. Przejście „z powrotem" (zaznaczone linią przerywaną) to zastosowanie funkcji odwrotnej (dlaczego?). Zapisując to samo algebraicznie, mamy:

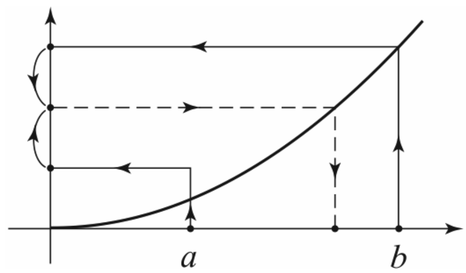
$$H(a, b) = \frac{1}{\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}} = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b}.$$

Zauważmy, że średnia harmoniczna liczb jest odwrotnością średniej arytmetycznej odwrotności tych liczb.



Możemy analogicznie skonstruować średnią arytmetyczną liczb z wykorzystaniem funkcji liniowej $y=kx$. Objaśnij, co dzieje się na rysunku obok.

$$A(a, b) = \frac{1}{k}\frac{ka+kb}{2} = \frac{a+b}{2}.$$



Nietrudno zgadnąć, jak zdefiniować w analogiczny sposób średnią kwadratową $K(a, b) = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, sześcienną $S(a, b) = \sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}}$, pierwiastkową $P(a, b) = \left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2$ itp.

Jaka funkcja (jakie funkcje) odpowiada(ją) za konstrukcję średniej geometrycznej? Sprawdź to rachunkiem algebraicznym.

Czy średnią można zdefiniować z wykorzystaniem dowolnej funkcji? Jakie jeszcze funkcje można wykorzystać (inne od podanych wcześniej)? Jakie średnie wówczas otrzymamy? Podaj przykłady funkcji, dla których zdefiniowanie średniej nie jest to możliwe. Jaka własność funkcji gwarantuje, że można zdefiniować średnią liczb względem tej funkcji?

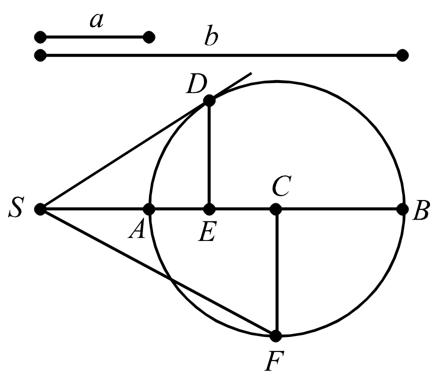
Zad. 8. Okazuje się, że średnie liczb a, b nie tylko wypadają zawsze pomiędzy tymi liczbami, ale zawsze w tej samej kolejności, niezależnie od wyboru liczb a i b. Można łatwo udowodnić nierówności (dla $a \le b$):

$$a \le \frac{2ab}{a+b} \underset{(iv)}{\le} \sqrt{ab} \underset{(iii)}{\le} \left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2 \underset{(ii)}{\le} \frac{a+b}{2} \underset{(i)}{\le} \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \le b,$$

czyli $a \le H \le G \le P \le A \le K \le b$. Równości zachodzą tylko dla $a=b$. Zajmiemy się dowodzeniem tych nierówności różnymi metodami.

Najłatwiejsze i najbardziej standardowe są **dowody algebraiczne**, ale i one zawierają pewne pułapki. Wykonaj kilka z nich dla wybranych średnich, starannie uzasadniając każde przejście. Zwróć uwagę na kierunek implikacji w rozumowaniu.

Z kolei **dowody geometryczne** są na ogół bardzo zaskakujące i trudno na nie wpaść (dlatego są trudne). Natomiast kiedy opiszemy sytuację geometryczną, w której występują różne średnie, wyliczenie tych średnich jest dość proste (choć nadal wymaga sporo inwencji), a dowody nierówności są natychmiastowe i wykonywane są już beż żadnych rachunków.



Oto figura opisana podczas wykładu o dowodach bez słów.
Dla $a < b$ budujemy odcinki $SA = a$, $SB = b$, SC, SD, SE, SF, gdzie C jest środkiem AB, D – punktem styczności, E jest rzutem prostopadłym D na AB, a F jest rzutem środkowym C na okrąg.
Długości tych odcinków spełniają oczywiste (z własności trójkąta) nierówności:
$a = SA < SE < SD < SC < SF < SB = b$, a przy tym długość każdego z nich odpowiada pewnej średniej liczb a i b. Wyznacz długości tych odcinków w zależności od a, b.

W dowolnym trapezie **odcinki równoległe do podstaw** (o długościach a i b, $a \leq b$) poprowadzone na właściwych wysokościach są średnimi długości tych podstaw.
Wylicz, jakie średnie odpowiadają długościom poniższych odcinków.

a) Łączy środki ramion trapezu.
b) Dzieli trapez na figury podobne.
c) Przechodzi przez punkt przecięcia przekątnych trapezu.
d) Dzieli trapez na równe pola.

Jak (bez rachunków) podać nierówności zachodzące między długościami tych odcinków?

Zad. 9. Te same nierówności zachodzą między średnimi dla dowolnej liczby liczb (co jest bardzo przydatne do rozwiązywania różnych zadań, więc warto o tym wspomnieć uczniom), jednak dowody tych nierówności są na ogół skomplikowane (nie tylko ze względu na żmudne rachunki). Można dowodzić tych nierówności indukcyjnie, ale rachunki też nie są proste. W niektórych przypadkach można przeprowadzić chytre rozumowania, ale to są już zadania dla uczniów szczególnie uzdolnionych. Poniżej przykład takiego rozumowania dla średnich arytmetycznej i harmonicznej pięciu liczb.

Dla a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 mamy: $a_i\, a_j \leq \frac{1}{2}(a_i^2 + a_j^2)$ dla wszystkich $i, j \leq 5$. Dodając te nierówności stronami dostajemy:

$$a_1a_1 + a_1a_2 + a_1a_3 + a_1a_4 + a_1a_5 + a_2a_1 + a_2a_2 + a_2a_3 + a_2a_4 + a_2a_5 + a_3a_1 + a_3a_2 + a_3a_3 + a_3a_4 + a_3a_5 + a_4a_1 + a_4a_2 + a_4a_3 + a_4a_4 + a_4a_5 + a_5a_1 + a_5a_2 + a_5a_3 + a_5a_4 + a_5a_5 \leq 10\cdot\frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2) = 5(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2).$$

Ponieważ lewa strona jest równa $(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)\cdot(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)$, mamy:

$$\frac{1}{5}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2}{5}}$$

. Tak samo można to udowodnić dla dowolnych n liczb.

Zad. 10. Czy dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich x, y zachodzą poniższe nierówności?

a) $8x^3+y^3+27>18xy$
b) $8x^3+y^3+27<15xy$
c) $8x^3+y^3+27>12xy$
d) $8x^3+y^3+27>6xy$

Zadanie wyrwane z kontekstu wydaje się trudne, ale w rzeczywistości to jest przykład bardzo prostego zadania (nadaje się nawet dla słabych uczniów) na wykorzystanie pewnej nierówności między średnimi dla trzech liczb (dlatego warto podać uczniom uogólnienie nierówności między średnimi; bez dowodu). Wykaż, jaka nierówność i między jakimi wielkościami przyda się do rozwiązania tego zadania.

Tu jest więcej przykładów takich zadań:
https://www.math.uni.wroc.pl/~jwr/SP2018/Lista2.pdf
https://www.math.uni.wroc.pl/~jwr/SP2018/Lista9.pdf
Oryginalnie były przewidziane dla klas 7-8 (zeszłoroczne kółko z uczniami, dla których większość z Pań prowadziła zajęcia na obozie zimowym), ale spokojnie można je wykorzystać w szkole średniej.