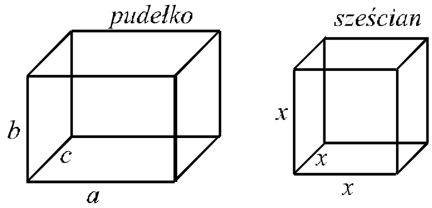
Lista nr 3 – Średnie (2)

Zastosowanie średnich do rozwiązywania zadań z różnych dziedzin



GEOMETRIA

Zad. 1. Wyznacz długość krawędzi sześcianu x o własności:

a) suma długości wszystkich krawędzi pudełka jest równa sumie długości wszystkich krawędzi sześcianu,
b) suma pól ścian pudełka jest równa powierzchni sześcianu,
c) objętość pudełka jest równa objętości sześcianu.

Co to za średnie?

Zad. 2. Przypomnij sobie, w jakich figurach występują średnie pewnych wymiarów tych figur (vide zad. 8 z listy2). Uzasadnij poniższe fakty.

a) W **trójkącie prostokątnym** wysokość opuszczona z wierzchołka kąta prostego jest średnią geometryczną odcinków, na jakie dzieli podstawę.
b) W **trójkącie** długość boku jest średnią arytmetyczną/harmoniczną pozostałych boków ⇔wysokość opuszczona na ten bok jest średnią harmoniczną/arytmetyczną pozostałych wysokości.
c) W **równoległoboku** iloczyn średniej harmonicznej/arytmetycznej boków i średniej arytmetycznej/harmonicznej wysokości daje pole.
d) **Koło** o promieniu będącym średnią arytmetyczną/geometryczną promieni danych kół ma obwód będący średnią arytmetyczną/geometryczną obwodów tych kół.
Koło o promieniu będącym średnią kwadratową promieni danych kół ma pole będące średnią arytmetyczną pól tych kół.
e) **Kula** o promieniu będącym średnią geometryczną promieni danych kul ma powierzchnię/objętość będącą średnią geometryczną powierzchni/objętości tych kul.
Kula o promieniu będącym średnią sześcienną promieni danych kul ma objętość będącą średnią arytmetyczną objętości tych kul.

Zad. 3. Wykaż, że średnia harmoniczna długości promieni kół dopisanych do trójkąta jest potrojoną długością promienia koła wpisanego w ten trójkąt. Szkic rozwiązania jest na końcu listy.

Zad. 4. Korzystając ze wzoru Herona oraz z nierówności między średnimi arytmetyczną i geometryczną, udowodnij, że trójkąt równoboczny ma największe pole spośród trójkątów o ustalonym obwodzie.

Zad. 5. Uzupełnij pytania i uzasadnij fakty.

a) Który z prostopadłościanów o ustalonej objętości ma naj........... sumę długości krawędzi?
b) Który z prostopadłościanów o ustalonej objętości ma naj........... powierzchnię?
c) Który z prostopadłościanów o ustalonej sumie długości krawędzi ma naj........... powierzchnię?

Zad. 6. Uzupełnij i uzasadnij zdanie: Z dwóch nieprzystających prostokątów o równych obwodach większe pole ma ten, którego różnica długości boków jest …

ARYTMETYKA

Zad. 7. a) Liczby a, b, c, d, e spełniają warunek $a+b+c+d+e=1$. Podaj sensowne oszacowania wyrażeń $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}$, $abcde$ i $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2$.

b) Liczby a, b, c, d, e spełniają warunek $abcde=1$. Podaj sensowne oszacowania wyrażeń $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}$, $a+b+c+d+e$ i $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2$.

Zad. 8. a) Liczby a, b, c spełniają warunek $a+b+c=1$. Podaj sensowne oszacowanie wyrażenia $ab+bc+ca$.
b) Liczby a, b, c, d spełniają warunek $a+b+c+d=1$. Podaj sensowne oszacowanie wyrażenia $ab+bc+cd+da$.

ALGEBRA

Zad. 9. Korzystając z nierówności miedzy średnimi arytmetyczną i geometryczną, udowodnij, że dla dowolnej liczby rzeczywistej dodatniej x zachodzi nierówność $5x^3 \leq 3x^5+2$.

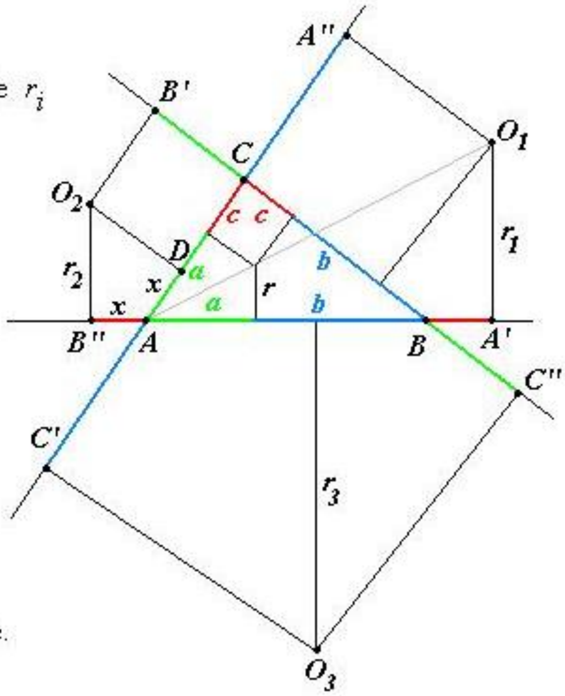
Zad. 10. Udowodnij, że dla dowolnych liczb naturalnych a, b, c, d zachodzi nierówność $\frac{3ab}{a^2+6b^2} < \frac{2c^2+3d^2}{8cd}$.

Rozwiązanie zadania 3. Proszę przeanalizować.

Dane są promienie r_1, r_2, r_3 trzech kół dopisanych do trójkąta ABC. Znaleźć promień koła wpisanego w ten trójkąt.

Plan rozwiązania:

1) uzasadnić, że jednokolorowe odcinki mają równe długości,
2) z podobieństwa trójkątów (tw. Talesa) wyrazić każdy z kolorowych odcinków a,b,c przez $p=a+b+c$ i odpowiednie r_i
3) uzyskane zależności dodać stronami i podzielić przez p



Szkic rozwiązania:

ad 1)

Czworokąt $BB'O_2B''$ jest deltoidem, zatem

$$BB'' = BB' \; (*)$$

ale $B'C = CD = AC - AD = a + c - x$

Po podstawieniu do $(*)$:

$$x + a + b = (a + c - x) + c + b$$
$$2x = 2c$$
$$x = c$$

Przy okazji $B'C = a$. Zatem czerwone i zielone odcinki są równe.

Podobnie można pokazać, że niebieskie odcinki są równe.

ad 2)

Z trójkąta $AA'O_1$, wobec $r \parallel r_1$, mamy $\frac{r}{a} = \frac{r_1}{p}$, gdzie $p=a+b+c=AA'$ jest połową obwodu trójkąta ABC.

Stąd $a = \frac{rp}{r_1}$. Analogicznie można pokazać, że $b = \frac{rp}{r_2}$ i $c = \frac{rp}{r_3}$.

ad 3)

Po dodaniu stronami ostatnich trzech równań otrzymujemy zależność: $p = rp\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}\right)$,

co daje:

$$r = \frac{1}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}}$$

Wynika stąd, że średnia harmoniczna długości promieni kół dopisanych do trójkąta jest równa potrojonej długości promienia koła wpisanego w ten trójkąt.

FIZYKA

Zad. 11. Oblicz średnią prędkość samochodu Schumachera, jeżeli:
a) pierwsze okrążenie jedzie z prędkością v_1, a drugie okrążenie jedzie z prędkością v_2.
b) w pierwszej minucie jedzie z prędkością v_1, a w drugiej minucie jedzie z prędkością v_2.
c) pierwsze okrążenie jedzie z prędkością v_1, drugie z prędkością v_2, a trzecie z prędkością v_3.
d) w pierwszej minucie jedzie z prędkością v_1, w drugiej minucie z prędkością v_2, a w trzeciej z prędkością v_3.
e) Pierwsze okrążenie Schumacher jechał z prędkością v_1, w drugim, na skutek awarii jechał z prędkością v_2. Z jaką prędkością powinien jechać trzecie okrążenie, jeżeli zwycięstwo gwarantuje mu średnia v uzyskana w 3 okrążeniach?
f) Wykonaj powyższe obliczenia dla $v_1 = 210$ km/h, $v_2 = 100$ km/h i $v = 200$ km/h. Co to oznacza?

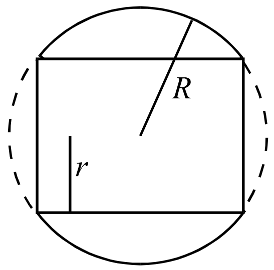
ZAD. 12. Jubiler ma wykonać kopię naszyjnika królowej Bony, który składa się ze stu srebrnych kulek, prawie jednakowej wielkości. Ich masy podane są w tabeli (łatwiej kulki zważyć niż zmierzyć ich promienie). Kopia składać się ma ze stu jednakowych kulek, więc jubiler jest żywotnie zainteresowany odpowiedzią na pytanie, jaki jest średni promień tych kulek.
Gęstość srebra $\rho = 10{,}49$ g/cm^3.
a) Bolek obliczył promienie wszystkich stu kulek, potem je zsumował i podzielił przez 100.
b) Lolek obliczył średnią masę kulki (arytmetyczną) i obliczył promień takiej średniej kulki.
Które rozwiązanie jest poprawne?

masa [g]	liczba kulek
0,44	20
0,5	50
0,55	30

Wskazówka.
Oba rozwiązania są poprawne, choć dają różne wyniki(!). Rozwiązanie Bolka odpowiada na pytanie, jak zrobić kopię naszyjnika o tej samej długości co oryginał. Rozwiązanie Lolka odpowiada na pytanie, jak zrobić kopię naszyjnika o tej samej masie co oryginał.

Jest też do pomyślenia trzecie rozwiązanie. Gdyby oba naszyjniki (oryginał i kopia) były pozłacane, to ważna byłaby zgodność powierzchni obu naszyjników. Zatem jak zrobić kopię naszyjnika o tej samej łącznej powierzchni kulek co oryginał?

W realistycznej wersji zadania warto wziąć pod uwagę, że kulki w naszyjnikach powinny mieć dziurki. Przyjmijmy zatem, że każdy koralik, to kula z wydrążonym wzdłuż średnicy walcem. Dla uproszczenia przyjmijmy, że wszystkie koraliki mają dziurki o tym samym promieniu $r = 0{,}2$ mm. Obok podany jest wzór na objętość wydrążonego koralika (skąd się wziął?). Stosowne obliczenia przeprowadź na kalkulatorze.



$$V = \frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{R^2 - r^2}\right)^3$$

Zad. 13. Przypomnij sobie z fizyki zagadnienie wyznaczania oporu zastępczego dla połączeń szeregowych i równoległych oraz równoważenia oporu mostka. Jaki to ma związek ze średnimi?