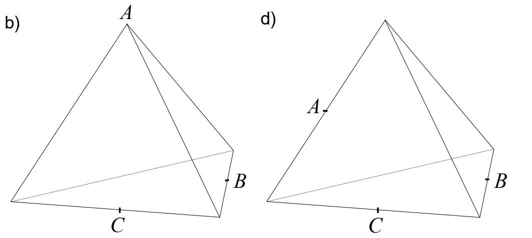
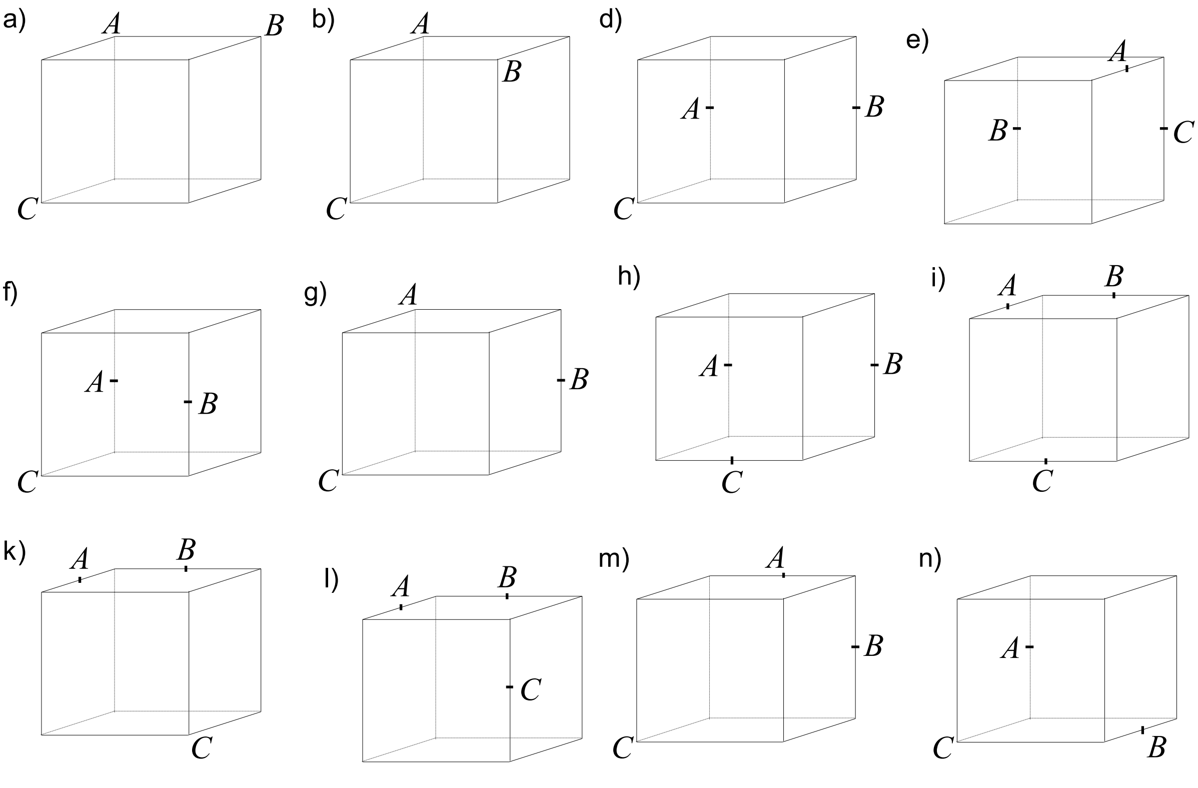
Lista nr 8

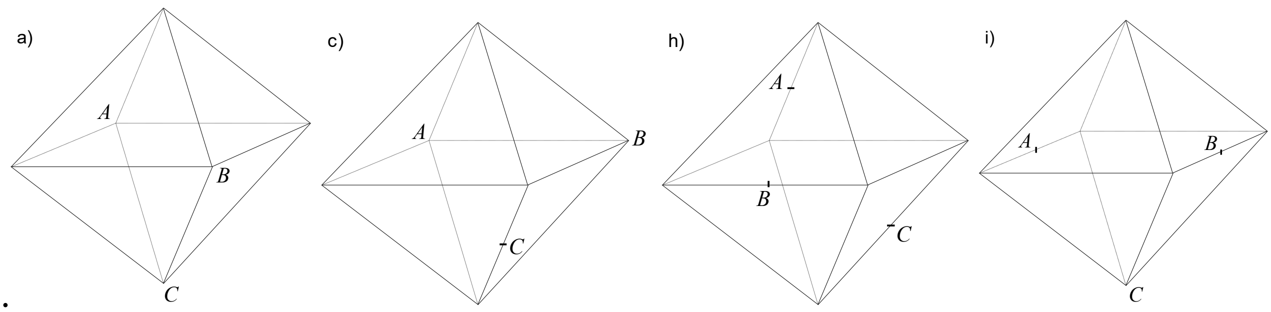
A) Lekcja rysunków

Zad. 1. Narysuj przybliżony kształt przekroju wielościanu płaszczyzną przechodzącą przez punkty *A*, *B*, *C* (punkty te są wierzchołkami lub środkami krawędzi danych wielościanów).

UWAGA. W trakcie rysowania warto zastanowić się, które z rysowanych odcinków są równoległe (równe)? Czy nowo zaznaczony punkt leży pośrodku danej krawędzi, czy też bliżej któregoś z wierzchołków? Które punkty są symetryczne względem środka danego wielościanu? Czy na pewno rysowane punkty leżą w jednej płaszczyźnie z punktami *A*, *B*, *C* ?







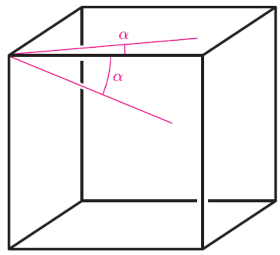
.

B) Zastosowania lekcji rysunków

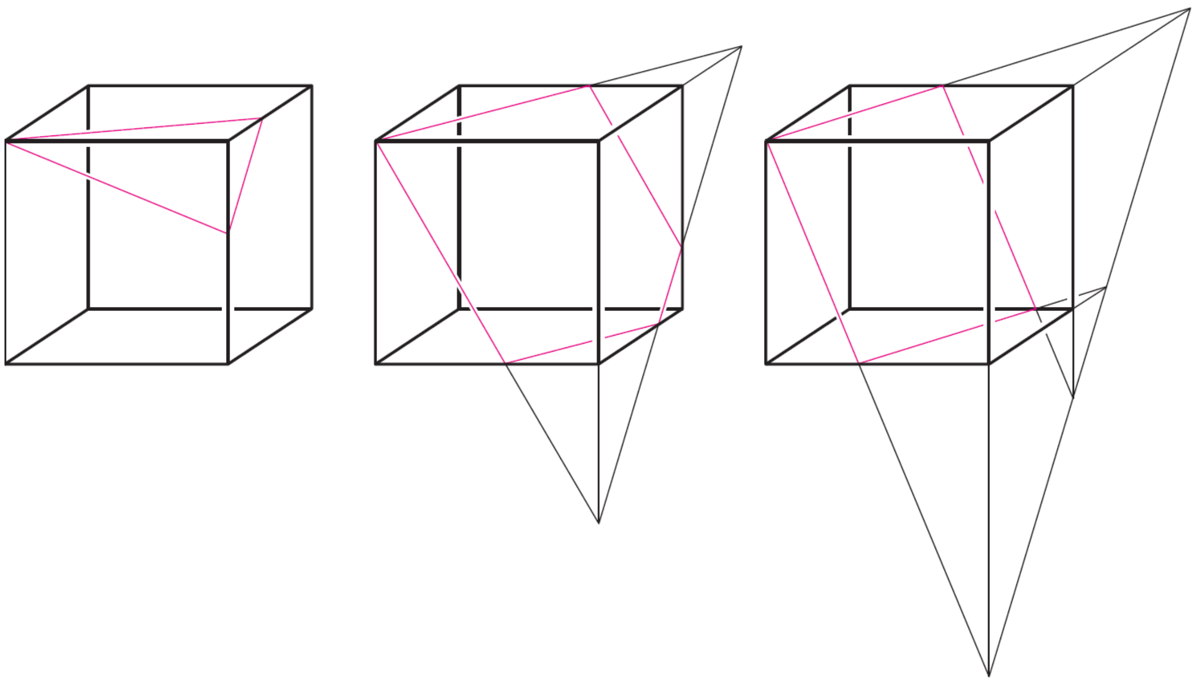
Zad. 2. Dla wielościanów z powyższych przykładów podaj opis we współrzędnych kartezjańskich (i.e. obierz wygodny układ współrzędnych; podaj współrzędne wierzchołków; podaj opis krawędzi, ścian).

Zadanie Kulczyckiego. Sześcian jednostkowy przecięto płaszczyzną przechodzącą przez wierzchołek i taką, że linie przecięcia dwóch sąsiednich ścian tworzą z ich wspólną krawędzią taki sam kąt płaski α. Obliczyć objętość odciętej bryły.

Rozwiązanie. Jakiej bryły? Zacznijmy od rysunku.



Każdy widzi, że gdy kąt α jest mniejszy od $\pi/4$, odcięta bryła jest czworościanem o objętości $V = \mathrm{tg}^2\alpha/6$. A jak jest dla większych kątów α?



Kluczowe dla prostego rozwiązania jest spostrzeżenie, że należy odciętą bryłę traktować jako **część wspólną** sześcianu i czworościanu takiego, jak w rozpatrzonym przypadku – oznaczmy go C. Wówczas widzimy, że dla $\pi/4 \leqslant \alpha \leqslant \mathrm{arc\,tg}\,2$ poza sześcian wystają dwa czworościany podobne do C w stosunku $(\mathrm{tg}\,\alpha - 1)/\mathrm{tg}\,\alpha = 1 - \mathrm{ctg}\,\alpha$ – ich objętości trzeba odjąć od V, a dla $\alpha \geqslant \mathrm{arc\,tg}\,2$ te wystające czworościany mają część wspólną też podobną do C, tylko w stosunku $(\mathrm{tg}\,\alpha - 2)/\mathrm{tg}\,\alpha = 1 - 2\,\mathrm{ctg}\,\alpha$ – do poprzedniego wyniku trzeba więc dodać jego objętość, bo w przeciwnym przypadku będzie odejmowana dwa razy. Ostatecznie szukana objętość dana jest wzorem

$$\frac{1}{6}\,\mathrm{tg}^2\alpha \cdot f(\alpha),$$

gdzie

$$f(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{dla } \alpha \leqslant \frac{\pi}{4}, \\ 1 - 2(1 - \mathrm{ctg}\,\alpha)^3 & \text{dla } \frac{\pi}{4} \leqslant \alpha \leqslant \mathrm{arc\,tg}\,2, \\ 1 - 2(1 - \mathrm{ctg}\,\alpha)^3 + (1 - 2\,\mathrm{ctg}\,\alpha)^3 & \text{dla } \alpha \geqslant \mathrm{arc\,tg}\,2. \end{cases}$$