Lista zadań nr 9 – Trygonometria w obrazkach

Oznaczenia stosowane w zadaniach: *ABC* – trójkąt wpisany w okrąg o średnicy 1, *H* – jego ortocentrum, *O* – środek okręgu opisanego na tym trójkącie.

Zad. 1. W oparciu o geometryczną interpretację wartości proporcji trygonometrycznych sformułuj:
a) twierdzenie sinusów
b) analogiczne do niego twierdzenie kosinusów.

Zad. 2. Uzasadnij, że okręgi poprowadzone przez dowolne trzy z czwórki punktów *A*, *B*, *C*, *H* są przystające.

Zad. 3. Wnioskując z zadania 2, uzasadnij, że odbicia ortocentrum w spodkach wysokości leżą na okręgu opisanym na trójkącie.

Zad. 4. Rozwiąż analogiczne zadanie 6 z Mistrzostw Polski w Geometrii Elementarnej 2020 dotyczące odbić ortocentrum w środkach boków trójkąta.

Zad. 5. Wyprowadź metodami geometrycznymi tożsamości trygonometryczne:
a) $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$
b) $\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$

Zad. 6. Wierzchołki trójkąta i jego ortocentrum tworzą tzw. **czwórkę ortocentryczną** punktów. Pokaż, że każdy z tych punktów stanowi ortocentrum trójkąta rozpiętego na pozostałych trzech punktach. Dzięki tej obserwacji rozumowanie przeprowadzone na wykładzie dla trójkątów ostrokątnych (bo przecież środek okręgu opisanego na trójkącie rysowaliśmy wewnątrz tego trójkąta) można uogólnić łatwo na trójkąty rozwartokątne.

Zad. 7. Pole trójkąta wynosi $\frac{1}{2} \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$.

Zad. 8. Zachodzi nierówność $\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma < \pi/4$.

Zad. 9. Potęga punktu *H* względem okręgu opisanego na trójkącie (tzn. iloczyn długości dwóch części dowolnej cięciwy przechodzącej przez ten punkt) wynosi $2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$.

Zad. 10. Odległość punktu antypodycznego do wierzchołka *C* od boku *AB* jest równa długości korzenia wysokości h_C.

Zad. 11. Kwadrat długości odcinka *OH* wynosi $\frac{1}{4} - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$.

Zad. 12. Zachodzi równość $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = 1$.

Zad. 13. Wysokości trójkąta spełniają nierówność $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} > \frac{1}{h_c}$.

Zad. 14. Promień okręgu wpisanego w trójkąt spełnia zależność $\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$.