

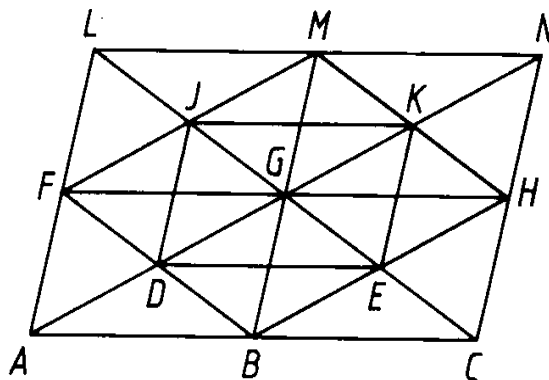
Lista nr 7

a) WPROWADZENIE

- dodawanie wektorów, czyli chodzenie po strzałkach
- wektory bazowe

Zad. 1. Wyznacz:

- a)  $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EK} =$    c)  $\overrightarrow{DF} + \overrightarrow{EH} =$    e)  $\overrightarrow{DJ} + \overrightarrow{FG} =$    g)  $\overrightarrow{FG} + \overrightarrow{CB} =$   
 b)  $\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{BH} =$    d)  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BM} =$    f)  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{KN} =$    h)  $\overrightarrow{CL} + \overrightarrow{DB} =$



Zad. 2. Uzupełnij:

- a)  $2 \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{GE} = \overrightarrow{A\dots}$    b)  $2 \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{GE} = \overrightarrow{D\dots}$    c)  $3 \cdot \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{DJ} = \overrightarrow{F\dots}$   
 d)  $3 \cdot \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{DJ} = \overrightarrow{\dots E}$    e)  $\overrightarrow{AE} - 2 \cdot \overrightarrow{FD} = \overrightarrow{\dots K}$    f)  $2 \cdot \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{\dots GD} = \overrightarrow{BM}$   
 g)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{AL} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \dots \cdot \overrightarrow{A\dots}$

Zad. 3. Przedstaw w postaci  $\alpha \cdot \overrightarrow{DE} + \beta \cdot \overrightarrow{DJ}$ :

- a)  $\overrightarrow{AN} = \dots \cdot \overrightarrow{DG} + \dots \cdot \overrightarrow{DJ}$    b)  $\overrightarrow{KN} = \dots \cdot \overrightarrow{DG} + \dots \cdot \overrightarrow{DJ}$    c)  $\overrightarrow{HB} = \dots \cdot \overrightarrow{DG} + \dots \cdot \overrightarrow{DJ}$    d)  $\overrightarrow{AH} = \dots \cdot \overrightarrow{DG} + \dots \cdot \overrightarrow{DJ}$   
 e)  $\overrightarrow{BL} = \dots \cdot \overrightarrow{DG} + \dots \cdot \overrightarrow{DJ}$    f)  $\overrightarrow{HD} = \dots \cdot \overrightarrow{DG} + \dots \cdot \overrightarrow{DJ}$    g)  $\overrightarrow{JE} = \dots \cdot \overrightarrow{DG} + \dots \cdot \overrightarrow{DJ}$    h)  $2 \cdot \overrightarrow{AG} + 3 \cdot \overrightarrow{LF} = \dots \cdot \overrightarrow{DG} + \dots \cdot \overrightarrow{DJ}$   
 i)  $12 \cdot \overrightarrow{DL} + 13 \cdot \overrightarrow{KH} - 14 \cdot \overrightarrow{GM} = \dots \cdot \overrightarrow{DG} + \dots \cdot \overrightarrow{DJ}$

Zad. 4. Niech  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  oznacza prostopadłościan, w którym  $AB = 2$ ,  $AC = 3$ ,  $AA_1 = 5$  i  $\vec{p} = \overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{q} = \overrightarrow{AC}$ ,  $\vec{r} = \overrightarrow{AA_1}$ . Za pomocą wektorów  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$  wyznacz wektory:

- a) o początku w A i końcu w: C, C<sub>1</sub>, B<sub>1</sub>, D<sub>1</sub>, środku odc. B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>, środku ściany ABB<sub>1</sub>A<sub>1</sub>, środku ściany BCC<sub>1</sub>B<sub>1</sub>.  
 b) o początku w D i końcu w: C, C<sub>1</sub>, B<sub>1</sub>, D<sub>1</sub>, środku odc. B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>, środku ściany ABB<sub>1</sub>A<sub>1</sub>, środku ściany BCC<sub>1</sub>B<sub>1</sub>.  
 c) Pod jakim kątem przecinają się przekątne ścian tego prostopadłościanu? Wsk. Użyj iloczynu skalarnego.  
 d) Pod jakim kątem przecinają się przekątne tego prostopadłościanu? Wsk. Użyj iloczynu skalarnego.

Zad. 5. Niech  $ABCDEFW$  oznacza ostrosłup prawidłowy o boku podstawy równym 2 i wysokości 5. Niech  $\vec{p} = \overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{q} = \overrightarrow{AF}$ ,  $\vec{r} = \overrightarrow{AW}$ . Za pomocą wektorów  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$  wyznacz wektory:

- a) o początku w A i końcach w wierzchołkach tego ostrosłupa.  
 b) o początku w środku odcinka CD i końcach w wierzchołkach tego ostrosłupa.  
 c) o początku w A i końcu w: środku odc. BC, środku odc. CW, środku (?) ściany ABW, środku ściany CDW.  
 d) Pod jakim kątem przecinają się proste łączące środki ścian ABW i CDW z punktem a)?

Które odpowiedzi nie zmienią się gdy wysokość ostrosłupa zmniejszymy do 3? A które gdy (przy tej samej podstawie) wierzchołek W przesuniemy tak, by odcinek CW był prostopadły do podstawy?

**b) METODY WEKTOROWE W GEOMETRII**

**Zad. 6.** Udowodnij, że odcinek łączący środki boków trójkąta jest równoległy do boku trzeciego i co do długości równy jego połowie.

**Zad. 7.** Udowodnij, że odcinek łączący środki ramion trapezu jest równoległy do obu podstaw, a jego długość równa jest średniej arytmetycznej długości podstaw.

**Zad. 8.** Wykaż, że proste zawierające wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

**Zad. 9.** Udowodnij, że środkowe w trójkącie dzielą się w stosunku 2 : 1.

**Zad. 10.** Wykaż, że ze środkowych trójkąta można zbudować trójkąt.

**Zad. 11.** Wykaż, że jeśli  $S$  jest środkiem ciężkości trójkąta  $ABC$ , to zachodzi równość  $\vec{AS} + \vec{BS} + \vec{CS} = \vec{0}$ . Co to oznacza?

**Zad. 12.** Wykaż, że dla dowolnego trójkąta zachodzi zależność  $s = \frac{3}{4}d$ , gdzie  $s$  oznacza sumę kwadratów długości środkowych, zaś  $d$  sumę kwadratów długości boków trójkąta.

**Zad. 13.** Wykaż, że przekątne równoległoboku są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy jest on rombem.

**Zad. 14.** Wykaż, że w równoległoboku suma kwadratów przekątnych równa jest sumie kwadratów boków.

**Zad. 15.** Udowodnij, że środki boków dowolnego czworokąta są wierzchołkami równoległoboku.

**Zad. 16.** Udowodnij, że jeśli przekątne czworokąta dzielą się na połowy, to czworokąt ten jest równoległobokiem.

**Zad. 17.** W koło wielkie kuli o promieniu  $r$  wpisano kwadrat. Udowodnij, że suma kwadratów odległości dowolnego punktu  $P$  powierzchni kuli od wierzchołków kwadratu jest równa  $8r^2$ .