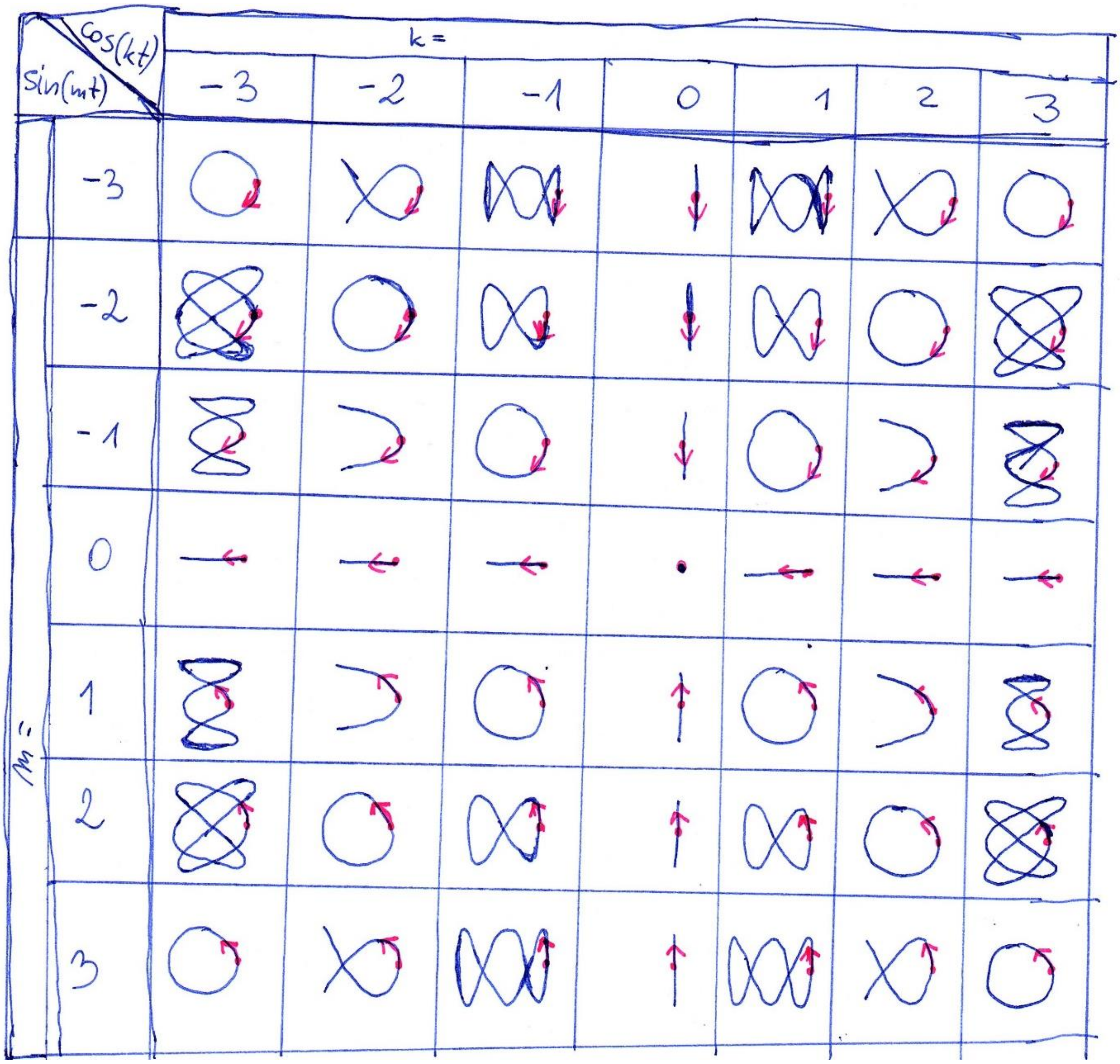
Lista 6 – podsumowanie

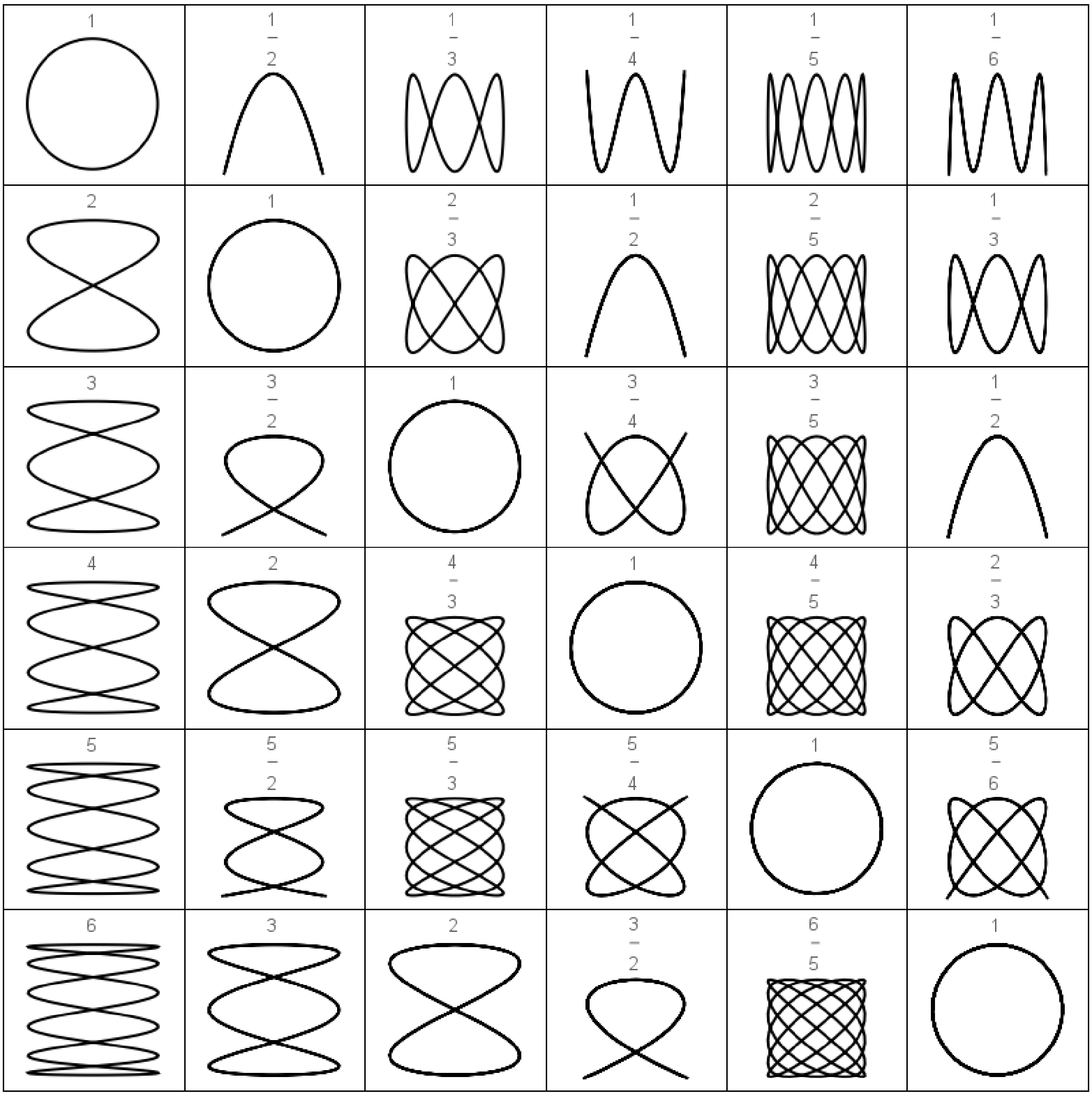
Zad. 6. ***k*, *m*** $\in$ **{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3}**

Poniżej pozwalam sobie zamieścić wzorcowy rysunek p. Bartłomieja Wieliczki (jako bardzo czytelny i wystarczająco staranny – położenia osi układu współrzędnych na tych rysunkach powinni się Państwo łatwo domyślić). Z tym zadaniem <u>prawie</u> wszyscy poradzili sobie bardzo dobrze. Kto miał inaczej, proszę zweryfikować swoją pracę. W szczególności proszę przemyśleć przypadek m=0. Część osób pisała „brak wykresu", a ten wykres jest odcinkiem lub punktem na osi *OX*, dlatego go nie widać bez zastosowania opcji „kółeczko", ale wystarczy przemyśleć sprawę, żeby wiedzieć, że wykres jest, nawet jeśli go nie widać. Zadziwiające jest, że właśnie dla wartości m i k równych 0, czyli wydawałoby się w najłatwiejszych przypadkach, zrobili Państwo najwięcej błędów.



Już ten niewielki fragment tabeli pozwala się zorientować, że kształt krzywej zależy tylko od stosunku m:k, a nie od ich konkretnych wartości, można więc łatwo przewidzieć (bez wykonywania wielkiej tabeli), w jakich miejscach dany kształt się powtórzy.

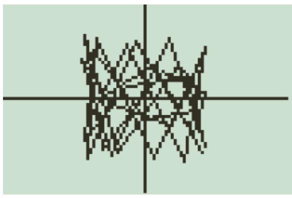
Kilka przypadków krzywych Lissajous (w zależności od stosunku częstości) przedstawia poniższy rysunek. Można się domyślić, że osie zostały na nim zamienione rolami w stosunku do zad. nr 6, co wyjaśnia, dlaczego ósemki są pionowe, a nie ma poziomych (odwrotnie niż w naszym rozwiązaniu). Do „casusu ósemki" jeszcze wrócimy.

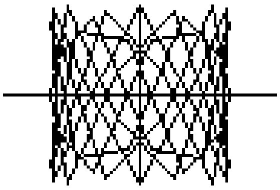


Na stronie kursu zamieściłam link do wersji animowanej figur Lissajous w 3D. https://external-preview.redd.it/XXaArsEFVSWghaB38mLWxl6Buo_7U5yVBkfbqAmQZdY.gif?format=mp4&s=0f2b04b934811ba2ff0d2f1458475d3027075fb9

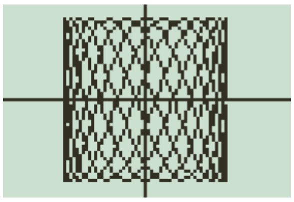
Przypadek *k*=5, *m*=13 niektórym sprawił problemy w uzyskaniu poprawnego wyglądu rysunku. Stosunek częstości drgań na osiach jest liczbą pierwszą, nie zachodzi więc żadna redukcja i na 5 wahań w poziomie wypada 13 wahań w pionie, ale otrzymana krzywa Lissajous powinna być (jak wszystkie pozostałe) bardzo regularna i gładka (to są przecież zagęszczone sinusoidy, nie ma powodu, żeby miały nieróżniczkowalne ostrza).

Czyli efekt nie powinien być taki:





ale raczej taki:



Casus ósemki

Sporo osób odkryło, że aby ósemkę poziomą przekształcić na pionową, wystarczy zamienić rolami osie *OX* i *OY*, (taka operacja zawsze przecież zamienia pion z poziomem), czyli w opisie parametrycznym trzeba zamienić miejsce wpisania sinusa i kosinusa. Jak widać z przykładu wcześniej zamieszczonej tabelki (z zamienionymi rolami osi), wtedy wystąpią w niej ósemki pionowe, ale nie będzie poziomych. W obu tabelkach, w miejscu, gdzie logika (i symetria tabelki) podpowiadają, że powinny być te brakujące ósemki, pojawiają się nieoczekiwanie parabole. **Dlaczego?** Na to pytanie mieli Państwo znaleźć odpowiedź. Zrobiła to tylko jedna osoba – p. Krzysztof Porębski. Brawo!

Tu zacytuję pytanie otrzymane od jednego z uczestników zajęć. *Niestety nie udało mi się znaleźć informacji na temat ,,casusu ósemki", stąd moje pytanie, z jakich źródeł powinniśmy czerpać informacje na temat tego ,,casusu"?* Moja odpowiedz brzmi: *z głowy, czyli z niczego*.

A teraz cytuję, co zauważył p. Krzysztof:

$x = \cos(2t)$, $y = \sin(t)$ nie daje „pionowej nieskończoności", gdyż $\cos(2t) = 1 - 2\sin^2(t)$.

Więc $x = 1 – 2y^2$ i otrzymany wykres ma kształt paraboli.

I to wyjaśnia całą tajemnicę. Ze znanej tożsamości trygonometrycznej następuje redukcja i otrzymujemy opis zależności kwadratowej między x i y, czyli kształt paraboli.

Na marginesie jeszcze uwaga do błędnego użycia znaku minus w powyższym zapisie. W pierwszej linii użyto minusa krótkiego, a w drugiej długiego, a oba powinny być długie, bo oba oznaczają odejmowanie, a nie operację brania liczy przeciwnej. Na kalkulatorze mamy dwa różne minusy i w poprawnej edycji tekstu matematycznego także taki zapis stosujemy. Do błędów w edycji tekstu jeszcze wrócimy.

Niektórzy z Państwa zamieszczali komentarze wskazujące na głębokie niezrozumienie tego, co dzieje się na ekranie. Cytat:

X=sin(2T), Y=cos(T).

Zauważmy, że zagęszczamy wartość argumentu, stąd tempo rysowania wykresu jest „coraz szybsze".

Zupełnie nie o to chodzi. Tempo rysowania wykresu jest stałe i zależy tylko od wartości Tstep. Zagęszczamy kształt <u>wykresu</u>, bo <u>wartości argumentu</u>, mnożąc przez 2, raczej rozciągamy. Okres drgań wzdłuż jednej osi jest dwa razy szybszy. To ma wpływ na kształt wykresu, ale nie na tempo jego rysowania.

Błędy edycji tekstu matematycznego

O dwóch rodzajach minusów już pisałam. Teraz zajmiemy się *kursywą* (czcionką pochyłą). W tekście matematycznym w taki sposób zawsze zapisujemy zmienne i parametry. Zatem nazwy funkcji sin i cos <u>nie są</u> kursywione (por. cytaty poniżej), bo taki zapis oznacza iloczyn zmiennych *s*, *i* oraz *n*. Oczywiście π, e oraz i oznaczające stałe matematyczne nie są kursywione, natomiast w nazwie funkcji $\pi(x)$ już będzie pisane kursywą, podobnie jak parametr *e* w równaniu *ax*+*e*.

$$X = cos(5t)$$
$$Y = sin(13t)$$
$$t \in [0, 2]$$

Jeśli na wyświetlaczu ma pojawić się pionowy obraz nieskończoności, wystarczy rozpocząć rysowanie wykresu nieskończoności od osi pionowej, czyli od osi Y. Zatem po podstawieniu $x = sin(2t)$ oraz $y = cos(t)$ na ekranie wyświetli się kształt ósemki.

Tak to wygląda, gdy jest wpisane w edytorze równań. Edytor kursywi wszystko poprawnie.

$$x = \cos(kt)$$

$$y = \sin\,(mt)$$

Ale to też jest błąd. Takich wzorów nie wpisujemy z edytora równań, tylko wprost z klawiatury (nie ma potrzeby nadużywania edytora, nie korzystamy tu z żadnej jego istotnej funkcji). Tyle ze trzeba pamiętać o poprawnie wstawionej kursywie. Podobnie błędem edycyjnym jest wpisywanie w tekście pojedynczych nazw zmiennych czy parametrów za pomocą edytora. Cytat:

Rysowanie ósemki rozpoczynamy w punkcie (0,1), bo $\sin(0) = 0$ oraz $\cos(0) = 1$. Na osi OX ruch następuje dwa razy szybciej, zatem współrzędna x robi dwa obiegi, a współrzędna y jeden.

Nie widać tego w pliku zamkniętym, ale w powyższym zdaniu *x*, *y*, *OX* są wpisane z edytora równań. Niepotrzebnie. Oba równania też należałoby wpisać wprost z klawiatury. Poza tym brak spacji w przedziale (0, 1). Bez spacji w nawiasie jest jedna liczba 0,1.

Eksperyment. Na koniec wstawiam jeszcze zdjęcie zabawki z muzeum nauki, w którym krzywe Lissajous są wysypywane piaskiem lub rysowane na piasku.