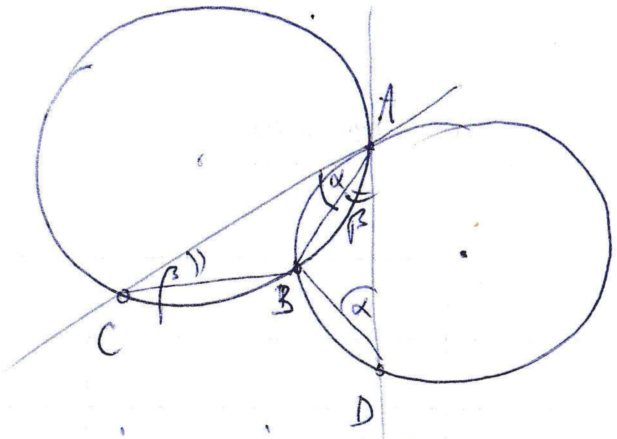
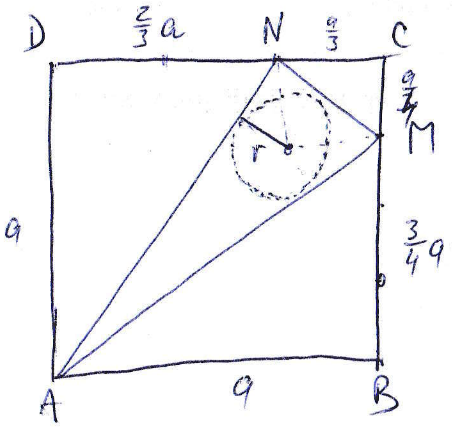
Zad. 1



Zauważmy że $\sphericalangle CAB = \sphericalangle BDA$ oraz $\sphericalangle BAD = \sphericalangle ACB$
(kąty dopisane równe odpowiednio kątom wpisanym)
Oznacza to że trójkąty ABC i ABD są podobne (kkk)
otrzymujemy proporcje $\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{|AD|}{|AB|}$ oraz $\frac{|BD|}{|DA|} = \frac{|BA|}{|AC|}$.
Mnożąc je stronami otrzymujemy $\frac{|AC| \cdot |BD|}{|CB| \cdot |DA|} = \frac{|AD|}{|AC|}$

Stąd $|AC|^2 \cdot |BD| = |AD|^2 \cdot |CB|$

Zad. 2 Odpowiedź $\frac{3a}{2(5+\sqrt{13})} = \frac{a(5-\sqrt{13})}{8}$.



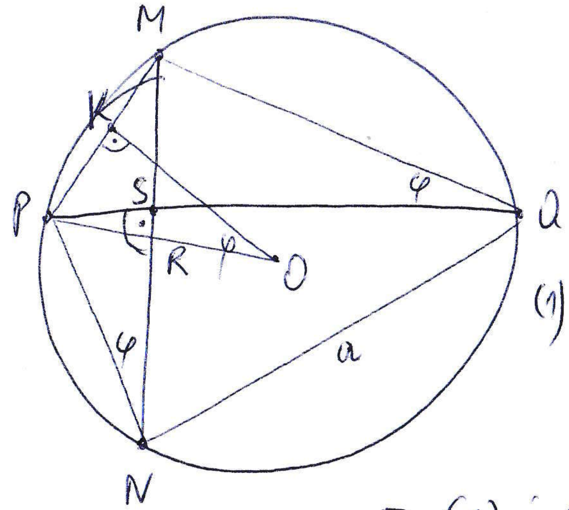
Można skorzystać ze wzoru $P_{\Delta AMN} = p \cdot r$ (gdzie p - połowa obwodu ΔAMN)

$P_{AMN} = P_{ABCD} - P_{ABM} - P_{MCN} - P_{AND} = a^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}a^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{12} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}a^2 = \frac{a^2}{4}$

$p = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2 + \frac{9}{16}a^2} + \sqrt{\frac{a^2}{9} + \frac{a^2}{16}} + \sqrt{a^2 + \frac{4}{9}a^2}\right) = \frac{a(5+\sqrt{13})}{6}$

Stąd $r = \frac{P_{AMN}}{p} = \frac{3a}{2(5+\sqrt{13})}$

Zad. 3 Odpowiedź $\sqrt{4R^2-a^2}$.



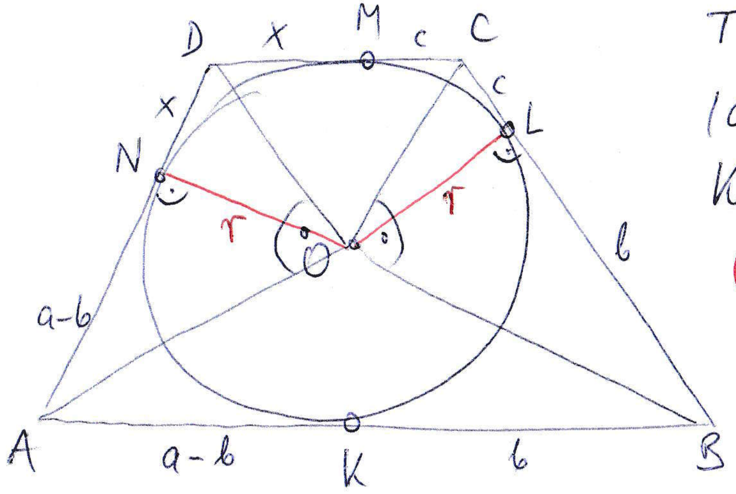
Niech K będzie środkiem cięciwy PM. Wówczas KO leży na symetralnej odcinka PM. Dalej $\sphericalangle POK = \varphi$ bo jest połową kąta środkowego opartego na łuku $\overset{\frown}{PM}$. Oznacza to że $\Delta POK \sim \Delta PSN$ skąd mamy proporcję

(1) $\frac{PS}{SN} = \frac{PK}{KO} = \frac{\frac{1}{2}PM}{KO}$. Z drugiej strony mamy oczywiste podobieństwo trójkątów PSM i NQS skąd proporcja (2) $\frac{PM}{PS} = \frac{a}{SN}$ skąd $PM = a \cdot \frac{PS}{SN}$ (3)

Z (1) i (3) otrzymujemy $\frac{PM}{a} = \frac{\frac{1}{2}PM}{KO} \Leftrightarrow KO = \frac{a}{2}$. Z tw. Pitagorasa w ΔPKO mamy $\sqrt{R^2 - \frac{1}{4}PM^2} = \frac{a}{2}$ i po przekształceniach $PM = \sqrt{4R^2-a^2}$.

UWAGA: PODOBIEŃSTWO TRÓJKĄTÓW MUSI BYĆ UZASADNIONE (PODANA CECHA...)

Zad. 4



Trójkąty AOD i BOC są prostokątne (nie wymaga uzasadnienia)

Ich wysokości ON i OL są równe bo są promieniami okręgu wpisan[ego]

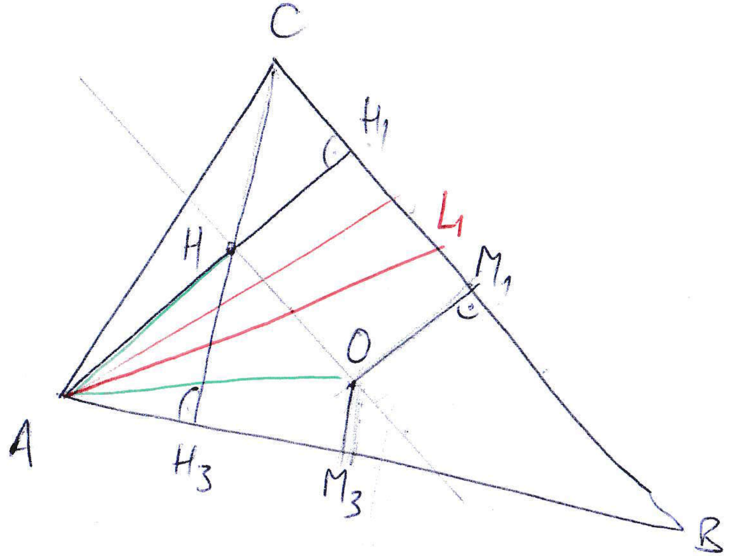
Korzystając z własności wysokości opuszczonej na przeciwprostokątną (nie wymaga uzasadnienia) otrzymujemy równanie

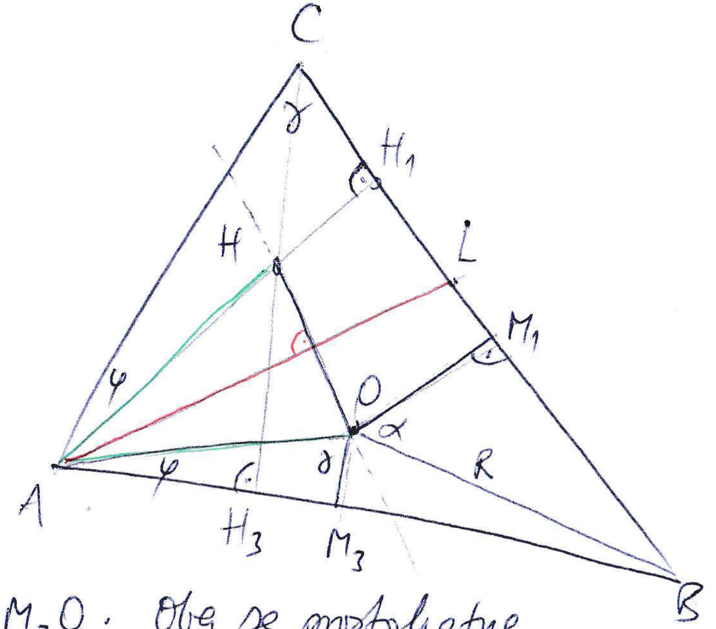
$r^2 = b \cdot c = (a-b)x$ skąd $x = \frac{bc}{a-b}$ oraz $r = \sqrt{bc}$.

Ostatecznie $P_{ABCD} = r \cdot \frac{1}{2}$ obwodu trapezu $= r \cdot \frac{1}{2}(a+b+c+c+x+x+a-b)$

$= \frac{a^2-ab+ac}{a-b} \cdot \sqrt{bc}$

Zad 5



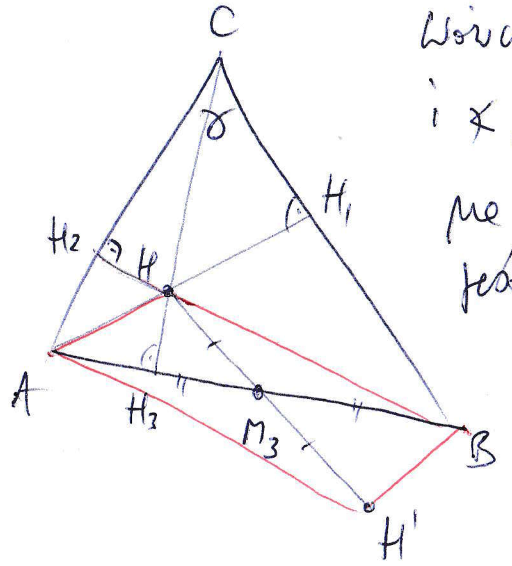


Rozważmy trójkąty AH_1C i AM_3O. Oba są prostokątne.

$\sphericalangle AOB = 2\gamma$ bo jest środkowym opartym na łuku AB. OM_3 jest symetralną boku AB stąd $\sphericalangle AOM_3 = \gamma$. Oznacza to że $\Delta AH_1C \sim \Delta AM_3O$ (k,k,k) i $\sphericalangle CAH_1 = \sphericalangle OAM_3$. Stąd $\sphericalangle HAL = \sphericalangle OAL$ (bo AL jest dwusieczną). Oznacza to że ΔAOH jest równoramienny przy czym $AH = AO = R$. Rozważmy teraz ΔOM_1B: $\sphericalangle M_1OB = \sphericalangle A$ (rozumowanie analogiczne jak przy kącie AOM_3). $OM_1 = \frac{1}{2} AH$ (jeśli ktoś powoła się na tzw. Fakt 3 należy uznać). Otrzymaliśmy trójkąt „ekierkowy" tzn. prostokątny w którym przyprostokątna jest równa przeciwprostokątnej! Oznacza to że $\sphericalangle OBM_1 = 30^\circ$ i $\sphericalangle BOM_1 = 60^\circ$.

Odpowiedź $\sphericalangle A = 60^\circ$

Zad. 6

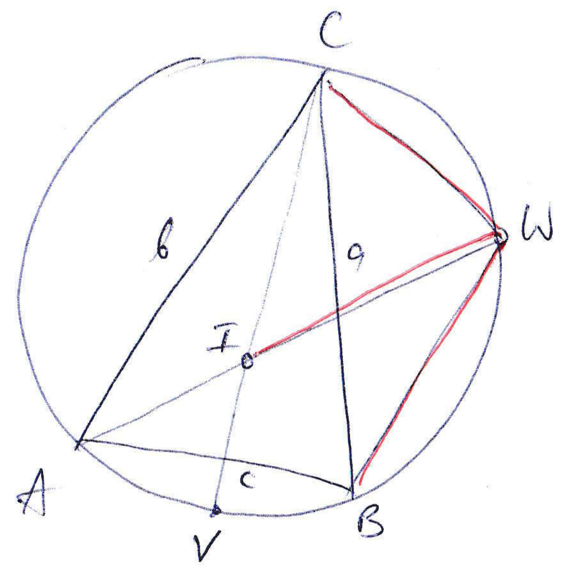


Niech M_3 środek boku AB i H' obraz H wzgl. M_3.
Wówczas czworokąt $AH'BH$ jest równoległobokiem
i $\sphericalangle AH'B = \sphericalangle AHB = \sphericalangle H_2HH_1 = 180 - \gamma$. Stąd
na czworokącie $AH'BC$ można opisać okrąg i
jest to okrąg opisany jednocześnie na ΔABC.

Stąd teza.

UWAGA: PRZYPADKI TRÓJKĄTA PROSTOKĄTNEGO I ROZWARTOKĄTNEGO ROZPATRUJEMY ANALOGICZNIE. ICH BRAK MOŻE DECYDOWAĆ PRZY TEJ SAMEJ LICZBIE PUNKTÓW.

Zad 7



Z Tw. Ptolomeusza mamy

$CW \cdot c + WB \cdot b = a \cdot AW$.

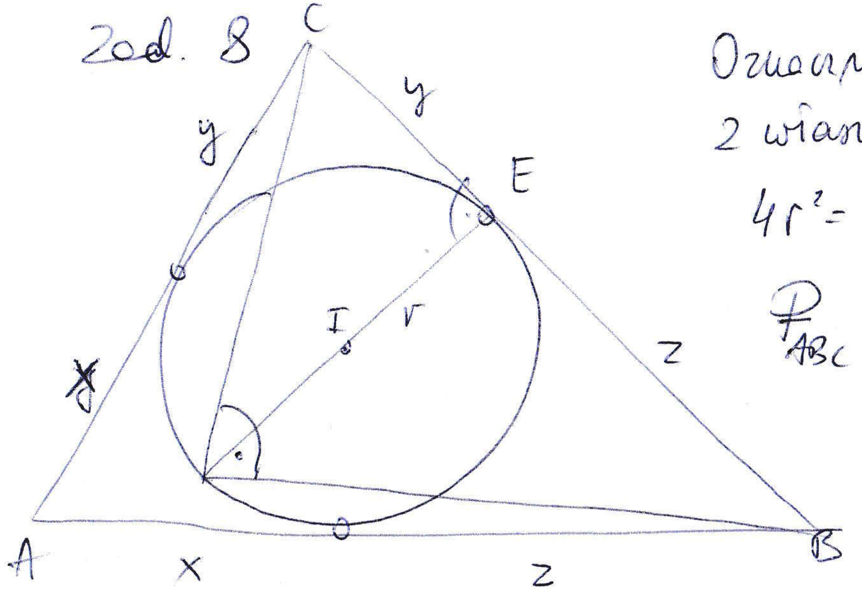
Z zasady „trójliścia" (trójnogu) $CW = WB = IW$ (nie trzeba dowodzić)

Po podstawieniu otrzymujemy

$IW(c+b) = a \cdot AW$ Z założenia mamy $a = \frac{b+c}{2}$ stąd

$IW(c+b) = \frac{c+b}{2} \cdot AW \Rightarrow 2 \cdot IW = AW$ stąd teza $AI = IW$

Zad. 8



Oznaczmy jak na rysunku.
Z własności wysokości opuszczonej na przeciwprostokątną mamy $4r^2 = yz$. Obliczając pole ΔABC ze wzoru Herona otrzymujemy

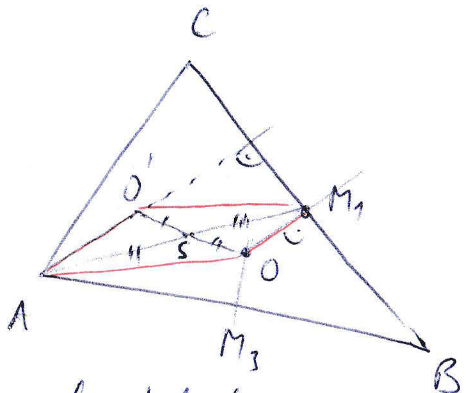
$P_{ABC} = \sqrt{(x+y+z)x \cdot y \cdot z}$, z drugiej strony $P_{ABC} = (x+y+z)r$

gdzie $x+y+z=p$ oznacza połowę obwodu trójkąta.

Otrzymujemy równanie $\sqrt{(x+y+z)xyz} = (x+y+z)r$. Uwzględniając że $y+z=a$ po podniesieniu obu stron do kwadratu

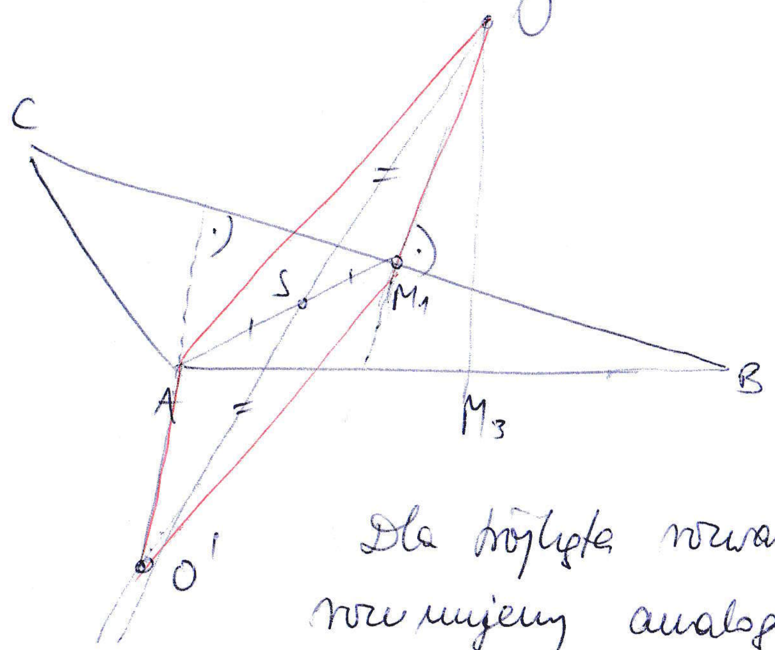
otrzymujemy $(x+y+z)xyz = (x+y+z)^2 r^2 \Leftrightarrow xyz = (x+y+z)\frac{1}{4}yz \Leftrightarrow 4x = x+a \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{a}{3}}$

Zad. 9



OM_1 jest symetralną boku BC

Niech O' będzie obrazem O w symetrii względem środka S. Wówczas czworokąt AOM_1O' jest równoległobokiem i $AO' \parallel OM_1$, stąd $AO' \perp BC$



Dla trójkąta rozwartokątnego rozumujemy analogicznie