Z matematycznego lamusa

Matematyczny alfabet

Między nami, erudytami

Słowo **alfabet** pochodzi od dwóch pierwszych liter alfabetu starogreckiego – *alfa* i *beta* (od 2000 lat Grecy czytają *betę* jako *wita* stąd rosyjskie słowo *алфавит*). Alfabet łaciński określa się w wielu językach europejskich nazwą **abecadło** – od jego trzech/czterech pierwszych liter (np. niem. Abece, hiszp. abecedario). Alfabety arabski i hebrajski nazywa się w niektórych językach **alefato**, od ich pierwszej litery *alef*/*alif*.

rys. spikera w telewizorze z dymkiem:
... w ubiegłym miesiącu zyski firmy MIKROSOK osiągnęły rekordową cyfrę 15 milionów euro...

KONKURS

Czy rzeczywiście liczby mają się do cyfr tak, jak słowa do liter? Na czym polega różnica?

7896, 302, 451 – oto przykład ciągu liczb, do zapisu których użyto wszystkich 9 cyfr, każdej jeden raz. Czy potrafisz podać przykład ciągu słów, w których wystąpią wszystkie 32 litery polskiego alfabetu, każda jeden raz? Czytelnicy, którzy wykonają to zadanie dla największej liczby liter, tak żeby otrzymane wyrazy tworzyły sensowne zdanie, i przyślą je do końca grudnia, otrzymają nagrody niespodzianki.

Wszyscy potrafimy zapisywać liczby i wykonywać na nich działania. Wydaje się to tak samo naturalne, jak chodzenie czy mówienie. Dlatego trudno uwierzyć, że ludzie nie zawsze potrafili liczyć i że próbowali zapisywać liczby na wiele sposobów, zanim wymyślono system, którym dziś się posługujemy.

Liczby i cyfry

Aby zapisywać słowa, potrzebujemy zestawu znaków graficznych nazywanych literami. Podobnie, aby zapisywać liczby, potrzebujemy zestawu znaków nazywanych cyframi. Jednak często nawet poważni ludzie mylą znaczenia słów liczba i cyfra; 15 tysięcy to liczba, którą zapisujemy za pomocą cyfr 1, 5 i 0 w taki sposób: 15 000. Cyfry to tylko umowne znaki. Nie mają wartości. Wartość mają tylko liczby, czyli odpowiedzią na pytanie „ile?” lub „który?” nie może być cyfra, tylko liczba.

Jak w takim razie odpowiedzieć na pytanie, czy 5 to liczba, czy cyfra? Podobnie jak dla „a” – czasem jest to litera, a czasem całe słowo. To zależy od kontekstu, a ten zazwyczaj łatwo określić. Liczby można dodać, pomnożyć, przeczytać, zapisać, odwracać (tzn. brać odwrotność) cyfry zaś można napisać, powiększać, obracać (np. o 180°). Odpowiedzią na pytanie „Jaka liczba jest większa od **5**?” jest np. **7**, a na pytanie „Jaka cyfra jest większa od 5?” jest np. 3.

A jednak często mówimy „suma cyfr pewnej liczby”, chociaż dodawać możemy tylko liczby. Wyrażenie to jest więc niepoprawne, ale używa się go, bo jest krótkie i zrozumiałe. Jest to zwrot z żargonu matematycznego, oznaczający sumę liczb jednocyfrowych reprezentowanych przez cyfry danej liczby (brrr… trudno to nawet powtórzyć).

W dalszej części artykułu spróbujemy odpowiedzieć na pytanie, co jest potrzebne, aby zapisywać i odczytywać liczby, i prześledzimy, jakich wynalazków ludzkość dokonała w tym zakresie.

Skąd się wzięły cyfry?

Przypuszcza się, że plemiona pierwotne nie miały nazw liczb większych niż 3. Tak liczył np. Kali – powieściowy przyjaciel Stasia i Nel. Liczby powyżej trzech nazywał *wengi-wengi*, czyli mnóstwo. To wcale nie znaczy, że nie widział różnicy, gdy upolował 5 i 15 bawołów. Jednak łatwiej było to zjawisko zapisać niż nazwać.

W czasach prehistorycznych zapisywano liczby w postaci pionowych kresek, ale była to metoda wygodna tylko dla małych liczb, a próba łączenia kresek w jednakowe grupy tylko na chwilę poprawiła sytuację. Pozostałości tej metody widać w zapisie rzymskim. Mamy tu liczby I, II, III. Znak V powstał z ukośnej kreski oddzielającej pełne piątki. Zapis IV oznacza, że chodzi o ostatnią kreskę przed piątką, X to po prostu złożone dwie piątki, a IX to ostatnia kreska przed dziesiątką. Jednak do zapisu dużych liczb niezbędne stało się wprowadzenie nowych znaków. Wykorzystano do tego wcześniejszy pomysł Greków – litery alfabetu. Pozwalało to zapisywać prosto dość duże liczby pod warunkiem zapamiętania wszystkich znaków i reguł. Jednak przy próbie wykonywania podstawowych działań arytmetycznych na dużych liczbach można było popaść w ciężką depresję (o czym łatwo się przekonać, robiąc samemu kilka przykładów i nie posiłkując się współczesnym zapisem).

Dużo wygodniejszy może wydawać się pomysł starożytnych Egipcjan, których cyfry w zapisie hieroglificznym miały kształt konkretnych przedmiotów. Sugeruje to, że pierwotnie przedstawiano liczby za pomocą obiektów materialnych (patyków, muszli, kwiatów), a działania arytmetyczne wykonywano przez odpowiednie grupowanie takich samych obiektów. W podobny sposób łatwo prowadzono później rachunki pisemne.

W opisanych systemach istotną rolę odgrywa liczba 10 i jej potęgi (zapewne dlatego, że początkowo rachunki prowadzono na palcach, na których najłatwiej odlicza się właśnie do 10). Takie systemy nazywamy **dziesiętnymi** (choć w przypadku rzymskiego niektórzy mówią o systemie piątkowo-dziesiętnym).

W każdym z tych systemów dana cyfra oznacza zawsze tę samą wartość, którą wnosi do liczby na zasadzie sumowania. Takie systemy nazywa się **addytywnymi**, od łacińskiego *addare* – dodawać (choć o systemie rzymskim niektórzy mówią „prawie addytywny”, dlaczego?). Wadą tych systemów jest to, że do zapisu coraz większych liczb potrzebowano coraz więcej znaków. Stąd zrodził się pomysł, aby ta sama cyfra mogła oznaczać różne wartości. Do tego potrzebny był jednak precyzyjny zestaw reguł umożliwiający jednoznaczny zapis i odczytanie liczby.

PREHISTORIA (???)

III = 3
IIIII = 5

IIIIIIIIIIIIIIIIIIIII = ?
IIII/ IIII/ IIII/ IIII/ I = ?

GRECJA (300 p.n.e.)

$\alpha = 1$	$\iota = 10$	$\rho = 100$
$\beta = 2$	$\kappa = 20$	$\sigma = 200$
$\gamma = 3$	$\lambda = 30$	$\tau = 300$
$\delta = 4$	$\mu = 40$	$\upsilon = 400$
$\varepsilon = 5$	$\nu = 50$	$\phi = 500$
ϛ = 6	$\xi = 60$	$\chi = 600$
$\zeta = 7$	$o = 70$	$\psi = 700$
$\eta = 8$	$\pi = 80$	$\omega = 800$
$\theta = 9$	ϙ = 90	ϡ = 900

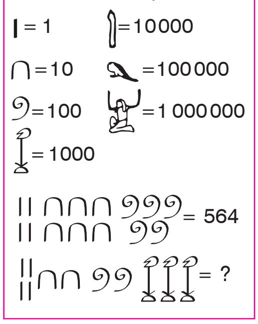
$\kappa\gamma = 23$, $\xi\alpha = 61$
$\omega\pi\zeta = ?$, $\phi\lambda\gamma = ?$

RZYM (200 p.n.e.)

I = 1	C = 100
V = 5	D = 500
X = 10	M = 1000
L = 50	

CMLXXIII = 973
MMV = ?
MCMLXXXVI = ?

EGIPT (3000 p.n.e.)



Skąd się wzięła baza?

Jaką największą liczbę można zapisać w systemie rzymskim? Ponieważ obowiązuje w nim reguła, że ta sama cyfra może wystąpić najwyżej trzy razy z rzędu, największą liczbą będzie 3999 = MMMCMXCIX. Aby zapisać 4000, musielibyśmy

RZYM (200 n.e.)

$\overline{\text{IV}} = 4000$

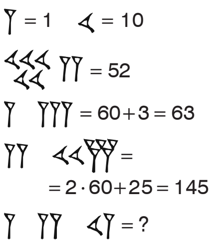
$\overline{\text{XXVII}}\text{CCCV} = 27\,305$

$\overline{\overline{\text{VII}}} = 7\,000\,000$

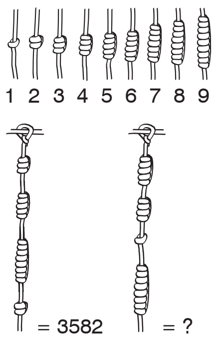
$\overline{\overline{\overline{\text{XII}}}} = ?$

$\overline{\overline{\overline{\text{CX}}}}\ \overline{\overline{\text{XLV}}}\ \overline{\text{CCL}}\ \text{CIV} = ?$

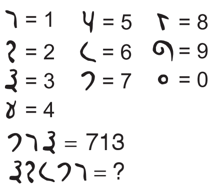
BABILON 3000 p.n.e.



INKOWIE 1300 n.e.



HINDUSI 500 n.e.



wprowadzić nową cyfrę na oznaczenie 5000. Rzymianie jednak tego nie zrobili, a problem zapisywania dużych liczb rozwiązali w ten sposób, że umieszczali kreskę nad cyfrą, aby jej wartość pomnożyć przez 1000, dwie kreski oznaczały dwukrotne mnożenie przez 1000 (czyli przez $1000^2 =$ $= 1\,000\,000$), w podobny sposób działały dalsze kreski. Zapis ten nie był jednak wygodny, gdyż był niejednoznaczny (dlaczego?), a poza tym zawracał do punktu wyjścia – liczenia kresek.

Na inny pomysł wpadli Babilończycy oraz Inkowie. Ze względu na charakter pism, jakimi się posługiwali – kliny odciśnięte na glinianej tabliczce i sznurowe węzły kipu (słowo *kipu* w języku Inków oznacza właśnie *węzeł*) – mieli do dyspozycji bardzo ograniczony zestaw znaków. Babilończycy używali dwóch cyfr (klin odbity w pozycji pionowej lub poziomej), a Inkowie jednej (supeł). Mimo tego ubóstwa oba systemy sprawdziły się bardzo dobrze.

Dla Inków bazą systemu była liczba 10 i ten zapis jest dla nas całkowicie zrozumiały – coraz wyższe supły oznaczają kolejne potęgi 10. Natomiast dla Babilończyków bazą była liczba 60, a zapis liczby podzielony był na rzędy. Cyfry z każdego rzędu sumowano jak w systemie addytywnym. Uzyskana w ten sposób liczba z pierwszego rzędu oznaczała jedności, z drugiego – sześćdziesiątki, z trzeciego – trzy tysiące sześćsetki (= 60^2) itd.

W tych systemach wartość, jaką oznaczała dana cyfra, zmieniała się w zależności od pozycji cyfry w liczbie (rząd, wysokość na sznurze), dlatego takie systemy nazywamy **pozycyjnymi**.

Opisane pomysły miały jednak pewną wadę – gdy brakowało cyfry w jakimś rzędzie, zostawiano w nim puste miejsce. Jednak przy nieuważnym odczytywaniu lub kopiowaniu zapisu łatwo było o pomyłkę. Wynalazek wymagał jeszcze udoskonalenia.

Małgorzata Mikołajczyk, Wrocław

Skąd się wzięło zero?

Matematycy indyjscy już w V wieku n.e. wprowadzili dziesiątkowy system liczbowy, używając jako cyfr 9 znaków graficznych. Jednak ich najważniejszym wynalazkiem było wprowadzenie dziesiątego znaku oznaczającego „próżnię”, „nicość”, czyli brak jednostek pewnego rzędu w zapisie liczby (znak ten wstawiano w to miejsce, gdzie w zapisie babilońskim lub inkaskim występowała przerwa). Cyfrę tę oznaczano początkowo kropką, potem kółkiem.

Pomysł Hindusów rozpowszechnił się na wszystkich kontynentach. Stało się to za pośrednictwem Arabów. Około IX wieku imperium muzułmańskie sięgało od Chin do zachodniej Afryki i Europy, obejmując swoimi wpływami także Indie. Arabowie potrafili szybko przyswajać wiedzę podbijanych ludów, dlatego docenili prostotę i genialność liczb indyjskich. W tym czasie w Bagdadzie powstała wielka biblioteka *Dom Mądrości*, która gromadziła dzieła uczonych z całego znanego muzułmanom świata, przetłumaczone na język arabski (dzięki temu zachowało się do naszych czasów wiele dzieł starożytnych matematyków greckich i rzymskich, które w oryginale spłonęły wraz z biblioteką w Aleksandrii lub były masowo palone jako heretyckie w okresie średniowiecza). Bagdad stał się wkrótce największym na świecie centrum naukowym. W czasie gdy Europa przeżywała kryzys intelektualny, nauka arabska była na bardzo wysokim poziomie i stale się rozwijała. W bibliotece pracowali wybitni uczeni i kształcili się młodzi ludzie z całego świata (w tym Leonardo Fibonacci). Na jej wzór założono później pierwsze europejskie uniwersytety. Jednym z bagdadzkich mędrców był matematyk Muhammad ibn Musa al-Chwarizmi, który napisał książkę o hinduskim systemie liczbowym. Jej późniejsze tłumaczenie na łacinę nosiło tytuł *Algorithmi de numero Indorum*, czyli *Dzieło Al-Chwarizmiego o liczbach indyjskich* (stąd pochodzi słowo algorytm) i z niego Europa poznała system dziesiętny. Do popularyzacji tego systemu walnie przyczyniło się też dzieło *Liber Abaci* Fibonacciego (patrz s.15).

Hinduska nazwa dziesiątej cyfry brzmiała *śunja*, co znaczy *puste*. Po arabsku było to *sifr* (stąd pochodzi również słowo szyfr), a Europejczycy przekształcili je w łacińskie *zephirum*. Od niego zaś pochodzi obecny wyraz *zero*.

Europejskim rachmistrzom trudno było się rozstać z zapisem rzymskim. Trudności w rachunkach, jakie im sprawiał, pokonywali za pomocą abaku – prymitywnego liczydła. Mimo że nowa forma zapisu pozwalała na łatwe i wygodne rachunki pisemne, przyjmowała się opornie. Najstarszy taki zapis znajdujemy na monetach wybitych w Królestwie Sycylii w 1138 r., a pierwszy polski tekst matematyczny z liczbami zapisanymi w nowym systemie pochodzi z 1397 r. Jednak jeszcze w 1229 r. rada miejska Florencji zabroniła używania cyfr arabskich (jak je w Europie nazwano), nakazując posługiwanie się symbolami rzymskimi lub zapisem słowami. W powszechnym użyciu system arabski jest dopiero od XVI w. Okazał się jednak wynalazkiem tak genialnym, że przyjął się na całym świecie i dotrwał właściwie bez zmian do czasów współczesnych

Skąd się wzięły systemy pozycyjne?

Jeśli ktoś poprosi nas, abyśmy zapisali numer bieżącego roku, każdy bez namysłu napisze **2005** i nie zastanawiamy się, że tak naprawdę posłużyliśmy się pewnym szyfrem. Jest on czytelny dla wszystkich, a jego reguły znają nawet przedszkolaki. Tę samą liczbę (przy pomocy bardzo podobnych reguł) można jednak zapisać inaczej, np. **11111010101**, **2202021**, **133111**, **31010**, **13141**, **5563**, **3725**, **2667** lub **7D5**, lecz teraz nie jest już oczywiste, o jaki rok chodzi. Trudność odczytania tych szyfrów bierze się z nieznajomości szczegółowej reguły ich zapisu. Szyfr, o którym mowa, to **zapis liczby w systemie pozycyjnym**.

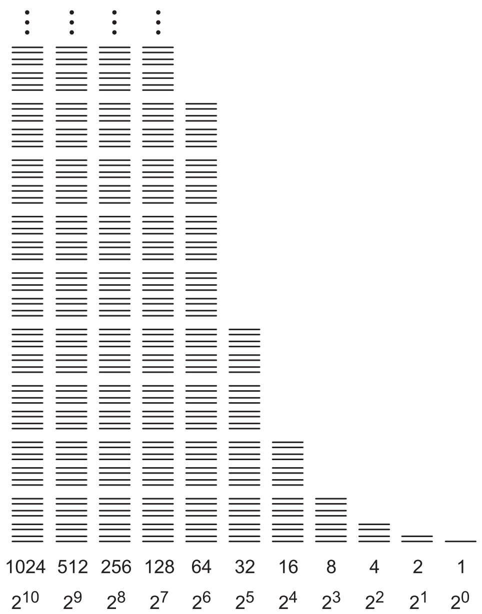
Nasi górą

W matematyce

XXVII Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki. Odbył się 6 września 2005 we Wrocławiu podczas dorocznego zjazdu Polskiego Towarzystwa Matematycznego. O tym konkursie pisaliśmy więcej w MMM 1/2005. W tym roku do finału dopuszczono 7 prac. Po wysłuchaniu 15-minutowych wystąpień finalistów, biorąc pod uwagę dobór tematu, treść pracy, sposób prezentacji i przebieg późniejszej dyskusji, jury przyznało: złoty medal (a wraz z nim 400 zł i pakiet *MathCad*) **Michałowi Marcinkowskiemu** (III LO Wrocław) za pracę *Prz(e)chodzi Euler do Nagela...*, dwa srebrne medale (i nagrody po 300 zł oraz pakiety *MathCad*): **Pawłowi Janicowi** (II LO Kielce) za pracę *Podziały przestrzeni euklidesowych* oraz **Tomaszowi Warszawskiemu** (V LO Kraków) za pracę *O cyklach i klikach*, trzy brązowe medale (i nagrody po 300 zł): **Arkadiuszowi Męclowi** (I LO Koszalin) za pracę *Symetrie różniczkowe*, **Marcinowi Piterze** (II LO Kraków) za pracę *Kilka problemów na szachownicy* i **Janowi Szejce** (XIV LO Warszawa) za pracę *Dwusieczna, wysokość i środkowa przecinające się w jednym punkcie*. Wyróżnienie (i 200 zł) otrzymał **Jarosław Pyzik** (II LO Kraków) za pracę *O sumach potęg, ich właściwościach i wykorzystaniu*. Finaliści otrzymali też dyplomy i nagrody książkowe, a ich opiekunowie dyplomy honorowe i nagrody po 200 zł. Skrót zwycięskiej pracy ukaże się w numerze 3/2006 miesięcznika „Delta”.

26 kolor
26 czarny

Na czym właściwie polega genialność tego pomysłu? Aby ją docenić, prześledźmy rozumowanie, które do niego doprowadziło. Wyobraźmy sobie, że chcemy policzyć owce w dużym stadzie. Każdą przepuszczamy przez bramkę na ogrodzone pastwisko i zaznaczamy ten fakt przy pomocy kreski patykiem na ziemi. Mamy też mały skrawek papieru, na którym chcemy zapisać liczbę owiec, ale kresek jest tak dużo, że się na nim nie zmieszczą. Wobec tego bierzemy dużo patyczków i układamy je w stosy, według prostego schematu: na pierwszym kładziemy jeden patyk, na drugim (z lewej strony poprzedniego) kładziemy dwa patyki, na trzecim – cztery itd. Za każdym razem podwajamy liczbę patyków na kolejnym stosie. Pracę tę wykonujemy tak długo, aż liczba patyków ułożonych w stosy przekroczy liczbę owiec. To, co otrzymamy, może wyglądać tak, jak na rys. 1. Widać, że liczby patyków w stosach rosną „lawinowo” (matematycy mówią „wykładniczo”), a proces tworzenia stosów można kontynuować dowolnie długo.



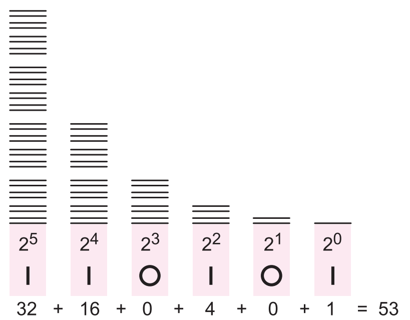
Rys. 1

Aby krótko zapisać liczbę owiec, wybieramy tak stosy, aby suma ich patyków była równa liczbie narysowanych kresek, a wtedy każdy wybrany stos zaznaczamy kreską (co oznacza, że do naszej liczby bierzemy wszystkie patyki w stosie). Pod niepotrzebnymi stosami wpisujemy kółko (rys. 2). W praktyce algorytm zapisu jest taki:

1. Przygotowujemy tyle stosów, żeby liczba wszystkich patyczków przekraczała liczbę do zapisania.

2. Wybieramy od lewej największy stos nieprzekraczający liczby i piszemy pod nim **I**.

3. Sumujemy patyczki ze stosów oznaczonych symbolem „**I**” z patyczkami w pierwszym wolnym stosie. Jeśli ta suma nie przekracza naszej liczby piszemy pod kolejnym stosem **I**, a jeśli przekracza – piszemy **O** i przechodzimy do kolejnego stosu powtarzając punkt 3.



Rys. 2

Teraz na skrawku papieru przepisujemy tylko układ kresek i kółek. Jeśli ktoś chciałby tak zaszyfrowany napis odczytać, powinien odtworzyć zawartość stosów (to jest klucz do szyfru) i zsumować patyki ze stosów wskazanych przez pionowe kreski. Skąd wiadomo, że dla każdej liczby zabieg szyfrowania się uda? I że zawsze będzie on jednoznaczny? Wyobraźmy sobie, że mamy tyle patyczków, ile wynosi liczba, którą mamy zaszyfrować. Układamy patyczki po 2. Jeśli został jeden bez pary, kładziemy go na stosie jedności i wpisujemy pod tym stosem **I**. Teraz każdą parę patyków zastępujemy np.

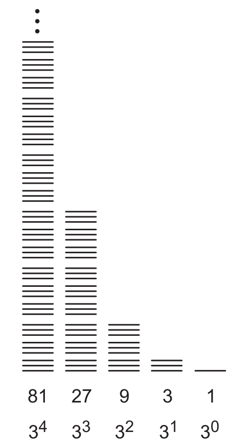
kamykiem i kamyki znowu grupujemy po 2. Jeśli został jakiś bez pary, kładziemy go na stosie dwójek (bo zastąpił 2 patyczki) i podpisujemy ten stos znakiem **I**. Dalej każdą parę kamyków zastępujemy np. muszelką i muszelki grupujemy po 2. Jeśli jakaś została bez pary, kładziemy ją na stosie czwórek (bo zastąpiła 4 patyczki) i podpisujemy ten stos **I**. Postępując tak, zawsze wyczerpiemy wszystkie patyczki i otrzymamy jednoznaczny rozkład kresek pod stosami. Pod pozostałymi wpisujemy **O**.

Ćwiczenie 1

Odczytaj zapisy: IOO, IOIOI, IIOIOO. Zaszyfruj opisaną metodą liczby: 7, 24, 36, 80, 256.

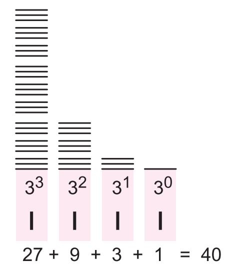
Do zaszyfrowania w ten sposób dowolnej liczby wystarczą dwa symbole: **I** i **O**. Standardowo używa się do tego cyfr 1 i 0, a sam szyfr nazywa się **zapisem pozycyjnym o bazie/podstawie 2** (bo liczba patyczków w stosach stale się podwaja, czyli są to kolejne potęgi 2). W taki sposób pamiętane są liczby w komputerach i innych urządzeniach elektronicznych.

Skoro można zaszyfrować zapis liczb, używając potęg dwójki, to dlaczego nie spróbować z potęgami jakiejś innej liczby? Sprawdźmy, jak funkcjonowałby nasz szyfr dla podstawy 3. Postępujemy podobnie jak poprzednio: na pierwszym prawym stosie kładziemy 1 patyczek, na drugim (z lewej) – 3 patyczki, na trzecim – 9 itd. Za każdym razem potrajamy liczbę patyczków z poprzedniego stosu (rys. 3).



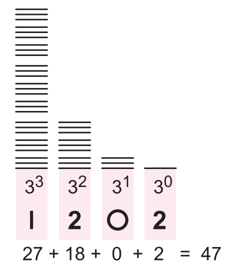
Rys. 3

Teraz spróbujmy zaszyfrować liczbę owiec równą 47. Podobnie jak poprzednio zaczynamy od najwyższego stosu, którego liczebność nie przekracza 47, czyli od tego z 27 patyczkami, zaznaczamy go kreską i przechodzimy do niższych stosów.



Rys. 4

W efekcie pod każdym stosem pojawiła się kreska, lecz tym razem sztuczka się nie udała! Przecież $27+9+3+1=40$. Podobnie systemem kresek i kółek przy podstawie 3 nie da się zapisać liczb 2, 5, 6, 7, 8 i wielu innych (a jakie się da?). Dlaczego szyfr się psuje? Otóż potrzebne jest czasem podwójne pobieranie patyczków z jakiegoś stosu. Poprawmy więc zasady zapisu. Wprowadźmy nowy symbol oznaczający taką operację podwajania. Teraz pod stosem będziemy pisali „**2**” – jeśli patyczki ze stosu pobieramy dwukrotnie, „**1**” – gdy jednokrotnie – i „**0**” – gdy stos pomijamy. Tym razem zapisanie liczby owiec poszło gładko (rys. 5).



Rys. 5

W ten sposób szyfrem trójkowym, czyli w **zapisie pozycyjnym o podstawie 3**, możemy zapisywać i odczytywać dowolne liczby. Dlaczego zawsze się to uda, a zapis będzie jednoznaczny?

Ćwiczenie 2

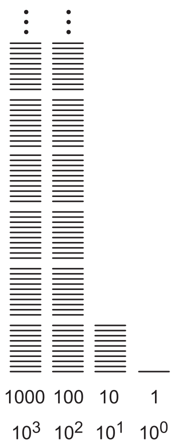
Odczytaj zapisy trójkowe: 100, 102, 2120. Zaszyfruj tą metodą liczby: 8, 21, 55, 99, 136.

Teraz nietrudno wymyślić, jak konstruować szyfry przy innych podstawach. Aby zapis każdej liczby był możliwy np. w systemie piątkowym, musimy dopuścić możliwość jedno-, dwu-, trzy- i czterokrotnego pobierania patyczków z każdego stosu i oczywiście pomijania go. Do szyfrowania użyjemy więc pięciu cyfr: 0, 1, 2, 3 i 4. Podobnie w systemie np. szesnastkowym musimy mieć 16 symboli. Standardowo wykorzystuje się do tego cyfry 0, 1, 2, 3, …, 8, 9 i dodatkowo A (oznacza pobranie 10-krotne), B (11-krotne), C, D, E i F (pobranie 15-krotne). Zatem 53 owce w systemie piątkowym to 203, a 47 w systemie szesnastkowym to 2F. Aby uniknąć nieporozumień, podstawę systemu, w jakim zapisano liczbę (czyli klucz do deszyfracji) zapisuje się w postaci dolnego indeksu przy liczbie.

Ćwiczenie 3

Co to za liczby? 37_3, 37_{16}, 10305_7, $12AC_{11}$,11602_5? Zapisz liczbę w systemie o podanej podstawie: 7777 w siódemkowym, 4681 w ósemkowym, 219 661 w sześćdziesiątkowym.

Teraz możemy przeanalizować doskonale nam znany zapis pozycyjny liczb o podstawie 10. Ponieważ używamy go na co dzień, nie kojarzymy go z żadnym szyfrem, chociaż jego struktura jest oparta na zasadzie stosów patyczków. Na pierwszym kładziemy 1 patyczek, na drugim 10, a na każdym kolejnym zwiększamy poprzednią liczbę dziesięciokrotnie (rys. 6).



Rys. 6

Aby móc zaszyfrować dowolną liczbę, musimy dopuścić możliwość aż 9-krotnego pobierania patyczków z każdego stosu, dlatego właśnie potrzebujemy 10 symboli: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Zapis liczby mówi nam więc, z których stosów i ilokrotnie pobieramy patyczki, np. $3268 = 3 \cdot 1000 + 2 \cdot 100 + 6 \cdot 10 + 8 \cdot 1$.

Skąd się wzięły liczebniki?

Pozostaje jednak jeszcze jeden problem: jak odczytywać liczby zapisane w systemach pozycyjnych. Zapisu 111_2 (oznaczającego w systemie dwójkowym liczbę 7) nie powinniśmy czytać jako *siedem* ani tym bardziej jako *sto jedenaście*. A jak?

Przyjrzyjmy się, jak zbudowana jest nazwa liczby w systemie dziesiętnym. Zapis 3268_{10} czytamy jako trzy tysiące dwieście sześćdziesiąt osiem, co pochodzi od: trzy tysiące dwie setki sześć dziesiątek osiem. Widać więc, że do skonstruowania nazwy liczby potrzebujemy nazw stosów i nazw cyfr (które mówią ile razy zabrać patyczki z danego stosu). Umawiamy się też, że pomijamy w nazwie stosy z cyfrą zero, a jeśli ze stosu bierzemy patyczki jednokrotnie, podajemy tylko nazwę stosu bez nazwy cyfry (tzn. mówimy *tysiąc sto*, nie *jeden tysiąc jedna setka*) i nie podajemy nazwy ostatniego stosu, a tylko nazwę cyfry (tzn. mówimy *trzy tysiące pięć* nie *trzy tysiące pięć jedności*). Zatem poprawna nazwa liczby 111_2 to *cztery dwa jeden*, liczby 2123 to *dwie dziewiątki trzy dwa*, a liczby $3A8_{11}$ to *trzy sto dwudziestki jedynki dziesięć jedenastek osiem*.

Zadania dla Czytelników

1. Opracuj pełny zestaw reguł zapisu liczb w systemie rzymskim.

2. Zapis pozycyjny to zapis liczby względem pewnego ciągu geometrycznego (potęg dwójki, trójki, dziesiątki). Czy można wprowadzić taki zapis względem ciągu Fibonacciego? Ile potrzeba w nim cyfr?

3. Jak rozszerzyć pojęcie systemu pozycyjnego (z dowolną bazą) na rozwinięcia po przecinku?

Na Czytelników, którzy przyślą odpowiedzi do końca grudnia, czekają nagrody – kalkulatory naukowe.

Ćwiczenie 4

Przeczytaj liczby: 101_2, 3024_3, $B7C_{13}$.

Aby usprawnić czytanie dużych liczb w systemie dziesiętnym, stosy grupuje się po 3, jak pokazano w tabeli 1.

Istnieje też inny standard grupowania wyższych stosów – po 6, jak pokazano w tabeli 2.

Tabela 1

...	tryliardy	tryliony	biliardy	biliony	miliardy	miliony	tysiące	jednostki
⋮	setki dziesiątki jedności	setki dziesiątki jedności	setki dziesiątki jedności	setki dziesiątki jedności	setki dziesiątki jedności	setki dziesiątki jedności	setki dziesiątki jedności	setki dziesiątki jedności

Tabela 2

...	tryliony	biliony	miliardy	miliony	tysiące	jednostki
⋮	setki tysięcy dziesiątki tysięcy tysiące setki dziesiątki jedności	setki tysięcy dziesiątki tysięcy tysiące setki dziesiątki jedności	setki dziesiątki jedności	setki dziesiątki jedności	setki dziesiątki jedności	setki dziesiątki jedności

Dalsze nazwy grup to: kwadryliony, kwintyliony, sekstyliony, septyliony, oktyliony, nonyliony, decyliony.

Ćwiczenie 5

Przeczytaj te liczby: 33 333 333 333 333 333, 1 111 111 111 111 111 111 111.
Ile cyfr ma największa liczba, której nazwę potrafisz podać? Jak się nazywa?

Marek Śmiech, Siemianowice Śląskie

LITERATURA

Denis Gudej, *Imperium liczb*, Gruner+Jahr, Warszawa, 2003.
George Ifrah, *Dzieje liczby, czyli historia wielkiego wynalazku*, Zakład Narodowy im. Ossolińskich, Wrocław, 1989.
Włodzimierz Krysicki, Edward Kącki, *Jak liczono dawniej, jak liczymy dziś*, Res Polona, Łódź, 2001.
Charles Seife, *Zero, niebezpieczna idea*, Amber, Warszawa, 2002.

A teraz spróbuj sam...

1. Czy istnieje liczba, która zapisuje się jednakowo we wszystkich systemach pozycyjnych?
2. Jaką największą liczbę można zakodować, używając 5 stosów dwójkowych?
3. Jaka jest największa liczba dwucyfrowa w systemie szesnastkowym?
4. Jaka jest najmniejsza liczba czterocyfrowa w systemie rzymskim?
5. Ilu cyfr używamy w systemie pozycyjnym o podstawie p?
6. Jaka jest najniższa podstawa systemu, w którym pojawia się cyfra C?
7. Jakie jest p, jeśli liczba 167254_{10} w systemie o podstawie p jest pięciocyfrowa?
8. Ile jest podstaw systemów, w których dana liczba n ma jednakowy zapis?
9. Przy jakich podstawach zapis liczby p jest jednocyfrowy?
10. Dla jakich podstaw systemu liczba 2005 jest trzycyfrowa?
11. W jakim systemie 57 896 przybiera postać 3 323 041?
12. O których równościach łatwo powiedzieć, że są fałszywe? Dlaczego?
a) $100_{100} = 1000_{10}$, b) $2540_6 = 775_9$, c) $12345_{10} = 341\,050_5$, d) $2226_7 = 2124_5$
13. Jaka jest najmniejsza podstawa systemu, przy której równanie $x^2 = 24_g$ ma dwa pierwiastki całkowite?
14. W jakim systemie $1\,234\,567^2 = 1\,234\,567\,892\,005$?
15. W jakim systemie zapisano te równości?
a) $5 \cdot 4 = 24$, b) $300 - 233 = 1$, c) $3 \cdot 3 = 14$?
16. W jakim systemie 16 324 jest kwadratem 125?
17. Ilucyfrowa jest liczba tysiąc osiemset osiemnaście w systemie rzymskim?

Odpowiedzi szukajcie w numerze.