Wykład O-2 w Internecie

-1-

Gusty (Preferencje)

Konsument przy kupowaniu patrzy nie tylko na ceny, ale też na to, co woli: jedni wolą piwo, a inni Coca-Colę albo ładne ubrania. Teraz podamy jak formalnie opisać gusty. Niech $\mathcal{X}$ jest przestrzenią towarów. Koszyki będziemy oznaczać dużymi literami A, B, C itd.

Rozpoczniemy od relacji słabej preferencji, pewnej relacji binarnej $\precsim$ na koszykach.

Mówimy, że koszyk A jest słabo preferowany względem koszyka B, co zapisujemy $A \succsim B$ (a po prostu koszyk A jest nie gorszy od koszyka B), gdy relacja $\precsim$ spełnia warunki:

1. Dla dowolnego koszyka A $A \precsim A$ (zwrotność). (intuicja: koszyk A nie może być gorszy od A)
2. Dla dowolnych koszyków A, B i C. Jeżeli $A \succsim B$ i $B \succsim C$, to $A \succsim C$ (przechodniość)
3. Dla dowolnych koszyków A i B mamy $A \succsim B$ lub $B \succsim A$ (spójność). Dzięki tej własności umiemy porównywać koszyki.

UWAGA Relacja $\precsim$ ma podobne własności, jak teraz relacja $\leq$ wśród liczb rzeczywistych (czy tzw. porządku liniowego)

Wykład O-2 w Internecie

Czym się różnią: dla liczb, gdy $a \leq b$ i $b \leq a$, to $a = b$.
Tu tej własności nie ma.

Mamy Definicję (relacji obojętności czy indyferencji).
Mówimy, że koszyki A i B są dla konsumenta obojętne (po prostu ceni je tak samo), gdy $A \precsim B$ i $B \precsim A$.
Co zapisujemy $A \sim B$.

Fakt Relacja obojętności jest relacją równoważności, czyli jest zwrotna, symetryczna (tzn. gdy $A \sim B$, to też $B \sim A$) i przechodnia.

To prosty do uzasadnienia fakt, proszę to to zrobić sami.

Stąd wniosek klasy abstrakcji relacji obojętności dzielą przestrzeń towarów na zbiory parami rozłączne, które w sumie dają całą przestrzeń towarów. (to powtórka ze "Wstępu do matematyki").

Definicja Klasy abstrakcji relacji obojętności, to tzw. krzywe obojętności.

Definicja (mocnej czy ścisłej preferencji). Mówimy, że koszyk A jest mocno preferowany względem koszyka B, jeżeli $A \succsim B$ i nieprawda, że $A \sim B$. Zapisujemy to $A \succ B$ (po prostu ~~[illegible]~~ konsument woli A niż B)

Wykład O-2 w Internecie

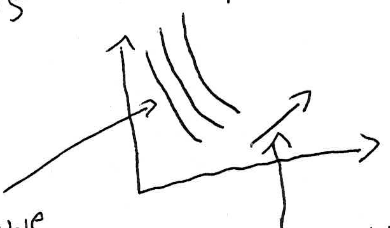
Tu można się bawić i wypisywać własności relacji $\prec$. Na przykład mamy przechodniość czy nie mamy zwrotności.

<u>Uwaga</u> I w końcu możemy zapisać, że dla dowolnych koszyków A i B, albo jeden z nich jest lepszy niż drugi, albo są obojętne dla konsumenta. Tu zwracam uwagę, że używamy dwóch notacji $A \succ B$ i $B \prec A$, jak dla nierówności na liczbach.

A teraz określę relację $\prec$ na zbiorze krzywych obojętności. Piszemy, że krzywa $K_1 \succ K_2$, jeżeli dla każdego koszyka $A \in K_1$ i koszyka $B \in K_2$ $A \succ B$.

I teraz mamy zadanie z „wstępu do matematyki". Mając określone krzywe obojętności i relację $\prec$ na krzywych możemy zdefiniować preferencje $\preceq$ w przestrzeni towarów $A \succeq B$ jeżeli A i B należą do jednej krzywej obojętności albo A należy do lepszej krzywej.

Robi się na przykład rysunek



krzywe obojętności

to wskazuje, która krzywa obojętności jest lepsza. Teraz zdefiniuję tzw. <u>dobrze zachowujące się</u> <u>preferencje</u>. Czyli pewne dodatkowe własności, które mogą mieć preferencje

Zdefiniujemy teraz, co to znaczy, że preferencje są monotoniczne, wypukłe i ciągłe.

Preferencje monotoniczne ("więcej jest lepiej")

Zdefiniujemy relacje $\geqslant$ i $>$ w R^n. To pewne relacje porządku, ale matematycznie mało ciekawe, bo nie są one spójne (nie każde 2 wektory są porównywalne).

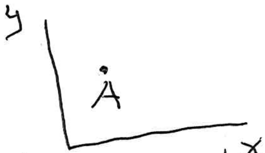
Niech mamy wektory $A=(x_1, x_2, \dots x_n)$ i $B=(y_1, y_2, \dots y_n)$.

Piszemy, że $A \geqslant B$, jeżeli dla każdego k $x_k \geqslant y_k$.

Kiedy piszemy, że $A > B$. Jeżeli $A \geqslant B$ i istnieje takie k: że $x_k > y_k$.

Definicja Mówimy, że relacja preferencji $\preceq$ jest monotoniczna (w domyśle mocno), gdy gdy dla dowolnych koszyków A, B, gdy $A > B$ jako wektory, to $A \succ B$, tzn. A jest lepszy niż B.

Proszę wziąć jako przestrzeń towarów pierwszą ćwiartkę na płaszczyźnie i



A jest koszykiem i preferencje są monotoniczne

Narysować koszyki lepsze niż koszyk A

Teraz zdefiniujemy preferencje wypukłe. Przypomnijmy, co to jest zbiór wypukły. Niech W będzie podzbiorem R^n

Wykład 0-2 w Internecie

Przypominam, że zb. W jest wypukły, jeśli dla dowolnych $A, B \in W$ i ich kombinacji wypukłej, czyli wektora $C = \lambda_1 A + \lambda_2 B$, gdzie $\lambda_k \in [0,1]$ i $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, wektor $C \in W$.

Wypukłość preferencji

Relacja preferencji jest <u>wypukła</u>, gdy

1. Przestrzeń towarów $\mathcal{X}$ jest zbiorem wypukłym
2. Dla dowolnego koszyka A zbiór koszyków $\{B \in \mathcal{X} \; B \succsim A\}$ jest zbiorem wypukłym

Ta definicja nie jest zbyt intuicyjna. Teraz udowodnimy fakt równoważny definicji, który daje pewną intuicję:

<u>Fakt</u> Relacja preferencji jest wypukła wtedy i tylko wtedy,
1 Przestrzeń towarów jest zbiorem wypukłym
2 gdy dla dowolnych koszyków A i B takich, że $A \precsim B$ i $\lambda_1, \lambda_2 \in [0,1]$ mających własność $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ $\lambda_1 A + \lambda_2 B \succsim A$

(tu znowu piszemy relację $\succsim$ a nie $\precsim$)

<u>Bo</u>: Niech $\precsim$ jest wypukła wtedy z pkt. 2 def. Mamy pkt 2 z faktu. Na odwrót z pkt. 2 z faktu od razu wynika pkt. 2 z definicji. Intuicje: koszyk, gdzie jest trochę z A i trochę z B jest nie gorszy niż nie lepszy z koszyków A i B.

Ścisła (inaczej mocna) wypukłość

Def. Relacja preferencji jest mocno wypukła, jeśli

1. Przestrzeń towarów $\mathcal{X}$ jest zbiorem wypukłym
2. Dla dowolnych koszyków A, B takich, że $A \leq B$ i $A \neq B$ i ich "prawdziwej" kombinacji wypukłej tzn. dla $\lambda_1, \lambda_2 \in [0,1]$, ale różnych od 0 i 1 i takich, że $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$

$$\lambda_1 A + \lambda_2 B > A$$

Ciągłość relacji preferencji

Państwo już są po wykładzie z "Analizy i Topologii" (gdy ktoś nie miał tego przedmiotu, to niech wyśle do mnie maila), więc rzeczy o których dalej piszę wiedzą. Dalej mówiąc o metryce w przestrzeni towarów rozumiem przez to metrykę euklidesową. Zakładam, że Państwo wiedzą, co to zbiór otwarty i domknięty w $\mathbb{R}^n$ i przestrzeni towarów z metryką euklidesową. Zakładam, że Państwo wiedzą, że dopełnienia zbiorów otwartych są domknięte i na odwrót - też w przestrzeni towarów. Teraz podam definicję Ciągłości relacji preferencji. Mówimy, że relacja preferencji w przestrzeni towarów $\mathcal{X}$ jest ciągła, gdy dla dowolnych koszyków A, B takich, że $A < B$ "bliscy sąsiedzi B" są gorsi od "bliskich sąsiadów A".

Wykład O-2 w Internecie

Co to ostatnie zdanie znaczy, że istnieją kulki otwarte $K(B, r_1)$ i $K(A, r_2)$ (r_1 i r_2 mogą być b. małe, ale muszą być dodatnie), że wszystkie koszyki z kulki $K(A, r_2)$ są gorsze od dowolnych koszyków z kulki $K(B, r_1)$.

Okazuje się, że ta definicja jest równoważna matematycznie bardziej intuicyjnej własności. Mamy bowiem

<u>fakt</u> Relacja preferencji $\precsim$ jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych dwóch ciągów koszyków $\{A_n\}$ i $\{B_n\}$ jeśli dla każdego n (wystarczy, że od pewnego n_0) $A_n \precsim B_n$ i $A_n \to A \in \mathcal{X}$ i $B_n \to B \in \mathcal{X}$, to $A \precsim B$.

Tu trzeba jeszcze wyjaśnić, co to znaczy, że $A_n \to A$ i $B_n \to B$. Tu $\to$ oznacza zbieżność wektorów po współrzędnych. Na przykład $n = 2$ i $A_n = (x_n, y_n)$ i ~~$A_n = (x_n, y_n)$~~. i $A = (x_0, y_0)$. Wówczas $A_n \to A$, gdy $\lim_n x_n = x_0$ i $\lim_n y_n = y_0$. Analogicznie definiujemy $\to$ gdy $n > 2$. Uzasadnimy powyższy <u>fakt</u>. Zanim udowodnimy

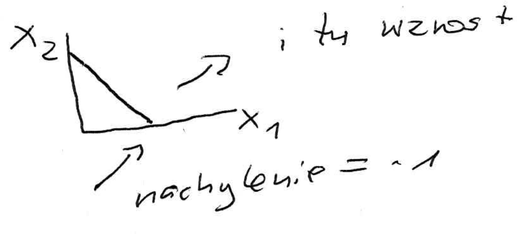
<u>Lemat</u> 1 Niech $\precsim$ jest ciągła. Niech A i B koszyki i $A \succ B$, to istnieją kulki otwarte K_1 zawierająca A i K_2 zawierająca B, że wszystkie koszyki z kulki K_1 są lepsze od dowolnych koszyków z kulki K_2. Lemat ten wynika od razu z definicji ciągłości relacji $\precsim$.

Dowodzimy teraz **fakt**. Niech relacja $\precsim$ jest ciągła i własność, którą dowodzimy nie zachodzi. Wówczas nie jest prawdą, że $A \precsim B$ to znaczy $A \succ B$. Ale wówczas z Lematu istnieją kulki otwarte K_1 zawierająca A i K_2 zawierająca B, że wszystkie koszyki z K_1 są lepsze od dowolnych koszyków z K_2. Ale to jest sprzeczne z faktem (analogicznym do faktu z $\mathbb{R}$), że gdy $A_n \to A$ i $B_n \to B$, to dla dowolnych kulek K_1 zawierającej A i K_2 zawierającej B od pewnego miejsca $A_n \in K_1$ i $B_n \in K_2$, co sprzeczne z założeniem, że $A_n \precsim B_n$.

Na odwrót. Niech spełniona jest własność z faktu, że relacja $\precsim$ jest ciągła. Bo wówczas dla dowolnego koszyka A $\{B \in \mathcal{X} : B \succsim A\}$ jest domknięty w $\mathcal{X}$, a stąd jego dopełnienie jest zbiorem otwartym w $\mathcal{X}$, skąd (co to zb. otwarty w $\mathcal{X}$) wynika ciągłość relacji $\precsim$. Kończy to dowód faktu.

Przykłady preferencji $n=2$: substytuty doskonałe w skali 1 na 1. Konsument chce je wymieniać wg stopy 1 na 1.

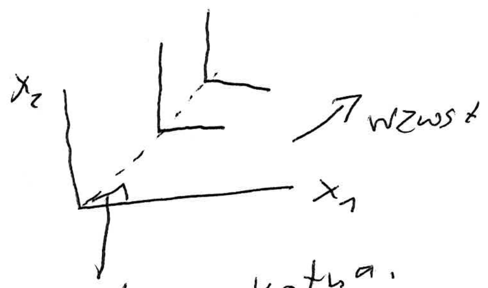
1:1 Krzywe obojętności



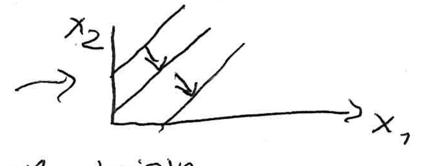
Wykład 0-2 w Internecie

Substytuty doskonałe w skali 1:1 można uogólnić na skalę $b:a$, $b,a>0$. W skali 1:1 ktoś nie rozróżnia kolorów i ma wybierać między niebieskimi i czerwonymi ołówkami i woli ich mieć więcej (to przykład)

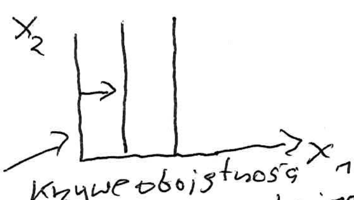
Dobre doskonale komplementarne w skali 1:1 (też można uogólnić na skalę $b:a$). Przykład konsument ma 2 nogi i wybiera lewe i prawe buty i buty na przykład 5 prawych i 5 lewych, to dodanie mu 6-tego prawego go nie cieszy. Tu dla $n=2$ (cały czas to zakładamy) mamy rysunek



Dalej $n=2$ dobra niechciane. Tu pierwsze dobro jest niechciane. Rysunek



dobra neutralne (obojętne)



Funkcje użyteczności

To co zdefiniujemy to tzw. funkcje porządkowe użyteczności. Tu każdemu koszykowi przyporządkowana jest liczba i ważne jest tylko, że koszykom gorszym przyporządkowana jest liczba mniejsza, a obojętnym taka sama. Są koncepcje tzw. kardynalnej funkcji użyteczności, która ma mierzyć "ile razy jeden koszyk jest lepszy niż drugi". My tu nie będziemy się zajmować takimi funkcjami. ~~nie~~ $\mathcal{X}$ to, jak zwykle, przestrzeń towarów.

Definicja funkcja $u: \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ jest funkcją użyteczności dla relacji preferencji $\preceq$, jeśli spełniony jest warunek (A i B to koszyki):

Dla dowolnych A, B $\quad A \preceq B \iff u(A) \leq u(B)$

Stąd wniosek, gdy $A \sim B$, to $u(A) = u(B)$ i gdy $A \prec B$ to $u(A) < u(B)$

Uwaga 1 Jeżeli u jest funkcją użyteczności dla preferencji $\preceq$, to takich funkcji jest wiele, bo dla dowolnej funkcji rosnącej $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcja $\tilde{u}(A) = f(u(A))$ też jest funkcją użyteczności dla relacji $\preceq$.

Uwaga 2 Dowolna funkcja $u: \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ jest ~~relacji~~ funkcją użyteczności dla pewnych preferencji. Dla jakich? Określmy relację $A \preceq_u B$, gdy $u(A) \leq u(B)$.