Mikroekonomia, wykład 5 w Internecie

-1-

Ostatnio rozpocząłem opowiadać o teorii postępowania producenta

Opowiedziałem co to są nakłady (czyli czynniki) produkcji, co to jest funkcja produkcji, co to są izokwanty i podałem pierwsze przykłady funkcji produkcji

Odpowiednikiem użyteczności krańcowych będą tu tzw. produkcyjności krańcowe. Dla ułatwienia niech $n=2$ i czynniki produkcji to pary (x,y) (na przypadek, gdy czynników produkcji jest n uogólnia się to bardzo prosto)

Rozpatrujemy użycie nieco większej ilości czynnika pierwszego, utrzymując nakład czynnika drugiego na stałym poziomie. Czyli, gdy f jest funkcją produkcji rozpatrujemy f_x (pochodną cząstkową f po x, o ile istnieje). To jest produkcyjność krańcowa czynnika 1.

Analogicznie definiujemy produkcyjność krańcową czynnika 2, tj. f_y.

Ekonomiści często traktują f_x mniej dokładnie jako dodatkowy produkt otrzymany z posiadania "jednej" jednostki więcej czynnika 1 (bo co dla ekonomistów jest "nieco większa", to większe o 1)

Analogicznie ekonomiści traktują f_y.

A co to jest TRS (techniczna stopa substytucji) – to odpowiednik MRS. Działamy w punkcie (x,y) i

| Rozpatrujemy rezygnację z pewnej ilości Δx czynnika 1 i użycie wzamian pewnej ilości czynnika 2 : Δy takiej (o ile się da), by wytwarzać taką samą ilość produktu.

Niech teraz Δx jest, jak mówią ekonomiści, krańcowo mała, czyli badamy (o ile istnieje

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

, gdy izokwanta jest zadana funkcją $y = f(x)$, to TRS = współczynnik nachylenia stycznej do izokwanty w punkcie (x, y), czyli $= f'(x)$

| analogicznie jak przy MRS możemy TRS obliczać dzieląc produkcyjności krańcowe $\frac{f_x}{f_y}$ o ile

$f_y \neq 0$.

Dalej Varian rozważa przykłady, że maleje produkcyjność krańcowa. Formalnie to może być różnie i trudno tu formułować jakieś twierdzenie.

Dalej mamy <u>definicje</u> <u>korzyści ze skali</u>

My tu cały czas będziemy zakładać, że mamy 2 czynniki (x, y) (tzn. $n = 2$) i f to funkcja produkcji. Mówimy, że mamy do czynienia ze <u>stałymi korzyściami ze skali</u>, jeśli na przykład $f(2x, 2y) = 2f(x, y)$ i ogólniej dla dowolnego $t > 0$

Mikroekonomia, wykład 5 w Internecie

$$f(tx, ty) = t f(x,y)$$

Gdy mamy dla dowolnego $t>0$ nierówność

$$f(tx, ty) > t f(x,y)$$

mówimy o <u>rosnących korzyściach ze skali</u>

Tu Varia podaje przykład rurociągu i podwajając zużyte do budowy materiały powierzchnia przekroju zwiększy się więcej razy

I dalej mamy malejące korzyści ze skali, gdy dla $t>0$

$$f(tx, ty) < f(tx, ty)$$

To trochę dziwna sytuacja

I w końcu wspomina się o tzw. <u>krótkim i długim okresie</u>. W krótkim okresie wszystkie czynniki produkcji są stałe np. nie możemy od razu dokupić więcej maszyn, a w długim można. Matematycznie to mało interesujące i bo raz mamy funkcję produkcji od mniejszej, a innym razem od większej ilości zmiennych

Mikroekonomia, wykład 5 w Interzecie

Maksymalizacją czego producent jest zainteresowany.
Wielkością produkcji? – by zalegała magazyny? NIE

Badać tu będziemy sytuację tzw. rynku konkurencyjnego, gdzie jest dużo małych firm, z których każda ma mały wpływ na cenę rynkową produktu. Przypominam, że badamy tu firmy produkujące jeden produkt
Co oznacza, że cena p za gotowy produkt jest z góry dana
Otóż producent jest zainteresowany maksymalizacją zysku, tj. różnicy między przychodami a kosztami.
Niech dalej $n=2$ i producent używa nakładów (x,y) i cena za jednostkę gotowego produktu jest p.
Jego przychód, to $pf(x,y)$ przy założeniu, że jest na tyle sprawny i wszystko, co wyprodukuje to sprzeda (w przeciwnym wypadku można $pf(x,y)$ mnożyć np. przez $3/4$ czy $1/2$).
A koszty te nakłady ileś kosztuje np niech cena nakładu x kosztuje w_1, a cena nakładu y w_2, więc koszty, to w_1x+w_2y
Zysk $\pi(x,y)$ to $= pf(x,y)-(w_1x+w_2y)$
To łatwo się uogólnia, gdy jest więcej nakładów i więcej ich cen.

Mikroekonomia, wykład 5 w Internecie

Uwaga Licząc ~~kosztów~~ koszty trzeba ująć wszystkie czynniki użyte przez firmę, gdy na przykład firma jest jednoosobowa, to trzeba liczyć, że właściciel zamiast zajmować się produkcją, mógłby podjąć pracę gdzieś indziej i zarabiać pieniądze, to też koszt działania firmy

Czym więc firma jest zainteresowana (tu n=2)

Szukać $\max\limits_{(x,y)} \left[p f(x,y) - (w_1 x + w_2 y) \right]$

Czyli maksymalizacją zysku. Policzę tu jeden przykład. On w Varianie jest źle policzony i podany tam wzór pasuje tylko do jednej sytuacji

Będziemy liczyć maksymalizację zysku dla funkcji produkcji Cobba-Douglasa, tj. $f(x,y) = x^\alpha y^\beta$, gdzie $\alpha > 0$ i $\beta > 0$ i zakładamy, że stała C przed $x^\alpha y^\beta$ jest $= 1$

Niech p to cena gotowego produktu i w_1, w_2 to ceny czynników. Zacznijmy od sytuacji, że zakładamy, że firma wydaje na produkcję m (ū czy dolarów, po prostu jednostek pieniędzy)

Mikroekonomia, wykład 5 w Internecie

Mamy więc $w_1 x + w_2 y = m \quad (*)$

i szukamy

$$(\square) \quad \max_{\substack{(x,y) \\ \text{przy } (*)}} \left(p x^{\alpha} y^{\beta} - m\right)$$

Przypominamy sobie teraz liczenie koszyków optymalnych dla funkcji użyteczności Cobba-Douglasa

Wiemy stąd, że maksimum w $(\square)$ jest osiągane

dla $x = \dfrac{m\alpha}{(\alpha+\beta)w_1}$ i $y = \dfrac{m\beta}{(\alpha+\beta)w_2}$

Zysk producenta przy tych nakładach to:

$$\pi(m) \quad p\left(\frac{m\alpha}{(\alpha+\beta)w_1}\right)^{\alpha} \cdot \left(\frac{m\beta}{(\alpha+\beta)w_2}\right)^{\beta} - m$$

oznaczenie

Stąd

$$\pi(m) = C_{\alpha,\beta,p,w_1,w_2} \cdot m^{\alpha+\beta} - m, \text{ gdzie}$$

stała

$$C_{\alpha,\beta,p,w_1,w_2} = \underbrace{p \cdot \left(\frac{\alpha}{(\alpha+\beta)w_1}\right)^{\alpha} \cdot \left(\frac{\beta}{(\alpha+\beta)w_2}\right)^{\beta}}$$

Dalej dla skrótu tę stałą będziemy oznaczali przez C

Mikroekonomia, wykład 5 w Internecie

Rozpatrzmy 3 przypadki

1. $\alpha+\beta=1$ na przykład $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$
2. $\alpha+\beta>1$ na przykład $\alpha=\beta=1$
3. $\alpha+\beta<1$ wzór podany w Varianie dotyczy tylko tego przypadku

Sytuacja 1 $\alpha+\beta=1$

$$\Pi(m) \quad C\cdot m-m=(C-1)m$$

Dla $C>1$ $\Pi(m)$ jest funkcją rosnącą, stąd maksimum globalne nie istnieje. Im więcej firma inwestuje, tym ma większy zysk. Jeżeli ograniczymy się, że $m\leq M$, bo mała firma nie może inwestować bardzo dużo, to maksimum jest w $m=M$

Popatrzeć wówczas na stałą C, która jest poprzednio podana i przy $\alpha=\beta=1/2$, znaleźć p, α_1, α_2, by $C>1$

Dla $C<1$ $\Pi(m)$ jest malejąca, więc im więcej inwestuję, tym więcej tracę. Najlepiej zrezygnować z tej produkcji.

Popatrzeć wówczas na stałą C przy $\alpha=\beta=1$ i znaleźć p, α_1, α_2, by $C<1$

Mikroekonomia, wykład 5 w Internecie

Dla $C=1$

$\pi(m)=0$ co oznacza, że warto zrezygnować z tej produkcji

Znowu pytanie dla $\alpha=\beta=1/2$ znaleźć p, w_1, w_2, by stała C poprzednio podana wyniosła 1.

Przypadek $\alpha+\beta>1$

$$\pi(m)= C m^{\alpha+\beta} - m$$

$$\pi'(m)= C m^{\alpha+\beta-1} - 1 \quad , \text{ gdzie } \alpha+\beta>1,$$

więc funkcja $\pi(m)$ rośnie od pewnego momentu i to do $+\infty$, więc im więcej, tym mam większy zysk (więc brak tu maksimum globalnego)

Tu dla $\alpha=\beta=1$ znaleźć maksimum przy jakiś ograniczeniach na m

Przypadek $\alpha+\beta<1$

$$\pi(m)= C m^{\alpha+\beta} - m$$

$$\lim_{m\to 0} \pi(m)=0$$

$$\lim_{m\to +\infty} \pi(m)=-\infty$$

Jeżeli m jest "małe", to funkcja $\pi(m)$ jest "mała"

Jeżeli m jest "b. duże", to $\pi(m)$ jest od pewnego momentu "mała".

Stąd maksimum jest w punkcie krytycznym

$$\pi'(m) = C(\alpha+\beta)\, m^{\alpha+\beta-1} - 1 = 0$$

Stąd

$$m^{\alpha+\beta-1} = \frac{1}{C(\alpha+\beta)}$$

Stąd

$$\underline{m} = \left(\frac{1}{C(\alpha+\beta)}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta-1}}$$

Tu należy wstawić za C, co podaliśmy na początku, aby otrzymać punkt krytyczny $\underline{m}$ funkcji $\pi(m)$ w pełnej postaci.

Ten punkt to zysk optymalny firmy, który definiuje <u>funkcje popytu na czynniki wytwórcze</u>.

Trzeba przypomnieć sobie koszyki optymalne pref. Cobba-Douglasa i za m wstawić tam $\underline{m}$. W Varianie tylko ten przypadek jest podany i tylko Varian zwraca uwagę, że gdy $\alpha+\beta=1$, to ten wzór nie ma sensu.

Pokażemy teraz inny sposób na liczenie tzw. <u>funkcji podaży</u> firmy. Racjonalny producent będzie

Mikroekonomia, wykład 5 w Internecie

realizować swój zysk optymalny i tyle produkować, co z tego optymalnego zysku wynika

Otóż dla zadanego poziomu produkcji z, załóżmy, że $z > 0$ definiujemy tzw. <u>funkcję kosztów</u>

$$C(z) = \min_{\substack{x,y \\ f(x,y)=z}} (w_1 x + w_2 y)$$

Czyli $C(z)$ to minimalny koszt wyprodukowania z

Tu zakładałem, że $z > 0$, bo ile kosztuje niewyprodukowanie nic, nic nie kosztuje, więc $C(0)=0$

Załóżmy, że dla funkcji produkcji $f(x,y)$ (znowu $n=2$) i danej ceny p za gotowy projekt umiemy policzyć funkcję kosztów $C(z)$.

Co producent powinien robić dalej:

Liczyć, o ile się da

$$p \cdot z - C(z)$$

i szukać maksimum tego wyrażenia po $z > 0$

Czyli szuka

$$\max_{z>0} (pz - C(z)$$

Niech $C(z)$ jest różniczkowalna, funkcja $C'(z)$ to tzw. <u>funkcja kosztów krańcowych</u>. Jeżeli w punkcie z to maksimum jest osiągane to jak wiadomo

$$p - c'(z) = 0$$

tzn.

$$c'(z) = p$$

Czyli koszty krańcowe (= koszt wyprodukowania dodatkowej jednostki) jest równy cenie rynkowej.

$\uparrow$

jak interpretują to ekonomiści

Teraz podamy przykład policzenia funkcji podaży firmy przy pomocy funkcji kosztów.

Niech funkcja produkcji jest quasi-liniowa, tj.

Znowu $n=2$

$$f(x,y) = \sqrt{x} + y$$

i ceny czynników x, i y są, odpowiednio, w_1 i w_2

Niech $z>0$ to ustalony poziom produkcji

Funkcja kosztów

$$c(z) = \min_{\substack{x,y \geq 0 \\ \sqrt{x}+y=z}} (w_1 x + w_2 y)$$

Stąd $y = z - \sqrt{x}$

i $$c(z) = \min_{x \in [0, z^2]} \left(w_1 x + w_2 (z - \sqrt{x})\right)$$

bo gdy $y=0$, to $\sqrt{x} = z$

Rachunki dokończymy za tydzień