Mikroekonomia, wykład 6 w Internecie

Zanim skończę liczenie funkcji podaży firmy, która ma quasi-liniową funkcję podaży, parę komentarzy na temat zadań z listy 3. Część Państwa mi przesłała to rozwiązania i oni dostaną odpowiedź na temat ich rozwiązań, ale wykorzystam też tekst poniżej. Tu będę pisał o zadaniach, gdzie mieli Państwo policzyć jakiś koszyk popytu, a nie na przykład o krzywych popytu, Engla itp. dla różnych dóbr.

Zad. 35

$m = 10$ zł

$p_1 = p_2 = 100$ zł

Preferencje są zadane funkcją użyteczności $\sqrt{x} + y$. Myśmy to rozwiązali na wykładzie w przypadku ogólnym i dlatego nie chcemy, aby rozwiązywali Państwo zad. 38, ale sprawdzili sytuację na konkretnym przykładzie. Otóż preferencje te są monotoniczne i koszyki popytu leżą na linii budżetu, tj mamy $100x + 100y = 10$. Stąd $x + y = \frac{1}{10}$ i równanie $y = \frac{1}{10} - x$. Rozpatrzmy funkcję $g(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{10} - x$. Szukamy maksimum funkcji $g(x)$ na przedziale $[0, \frac{1}{10}]$. Tu punkt krytyczny $\underline{x} = \frac{1}{4}$ i $\frac{1}{4} > \frac{1}{10}$. Stąd maksimum jest w $\frac{1}{10}$ (różnie można to uzasadniać na przykład porównując $g(0)$ i $g(\frac{1}{10})$.

A w zadaniu pytają o koszyk optymalny, o czym niektórzy zapomnieli, to koszyk $(\frac{1}{10}, 0)$.

Mikroekonomia, wykład 6 w Internecie

-2-

Tu $p_2 = 1$ i $p_1 = 20$. I pytanie jest tylko o spożycie żony (Proszę teksty czytać uważniej)

Żona ma $m = 2000$. Preferencje żony są monotoniczne itd. Mamy więc równanie $20x + y = 2000$. Stąd

$y = 2000 - 20x = 20(100 - x)$

Niech $g(x) = x^2 + [20(100-x)]^2$. Szukamy maksimum funkcji $g(x)$ na przedziale $[0, 100]$

UWAGA Funkcja $g(x)$ jest trójmianem i dalej żadne pochodne nie będą potrzebne

$$g(x) = x^2 + 400(100-x)^2 = x^2 + 400(100^2 - 200x + x^2)$$

Przy x^2 jest $401 > 0$

Przy x jest $-400 \cdot 200 = -80000$

wyraz wolny to $400 \cdot 100^2 = 4$ mln

Wykres $g(x)$ jest postaci

$-\frac{b}{2a}$

stosuję tu standardowe oznaczanie dla trójmianu $ax^2 + bx + c$

$$-\frac{b}{2a} = \frac{80\,000}{802} < 100 \qquad g(100) = 100^2$$

Więc maksimum jest w 0. Pani jest wegetarianką!

(Jestem człowiekiem tradycyjnym i dla mnie żony, to panie)

Zad 37 Funkcja użyteczności $= e^x + y$, mamy że preferencje są monotoniczne i spełnione jest równanie:

$$p_1 x + y = m, \text{ gdzie } p_1 \text{ cena } x, \ p_2 = 1 \text{ z założenia}$$

i m jest dochód

Niech $g(x) = e^x + m - p_1 x$

Szukamy maksimum $g(x)$ na przedziale $[0, \frac{m}{p_1}]$

Tu $g'(x) = e^x - p_1$, stąd punkt krytyczny, to

$$x = \ln p_1 \quad \text{(piszę ln, jak Państwo lubią)}$$

Ponieważ $g''(x) = e^x > 0$, to w punkcie krytycznym mamy minimum lokalne, a więc nie może tam być maksimum

Jeżeli $p_1 < 1$, to $\ln p_1 < 0$ i maksimum na przedziale $[0, \frac{m}{p_1}]$ jest w $\frac{m}{p_1}$ (wtedy $g'(x) > 0$ dla $x \geq 0$)

Jeżeli $p_1 \geq 1$, to porównujemy

$$g(0) = m + 1 \text{ z } g\left(\frac{m}{p_1}\right) = e^{\frac{m}{p_1}} \text{ i stąd}$$

wyznaczamy, gdzie jest maksimum i to maksimum będzie naszą odpowiedzią.

Teraz wracamy do quasi-liniowej funkcji produkcji

$$f(x, y) = \sqrt{x} + y$$

Niech w_1, w_2, to ceny czynników a $z \geq 0$ to ustalony poziom produkcji:

Mikroekonomia, wykład 6 w Internecie

-4-

Liczymy funkcję kosztów

$$c(z) = \min_{\substack{x,y \geq 0 \\ \sqrt{x}+y=z}} (w_1 x + w_2 y)$$

Z równości $\sqrt{x}+y=z$ wynika, że $y = z - \sqrt{x}$

I dalej

$$c(z) = \min_{x \in [0, z^2]} (w_1 x + w_2 (z - \sqrt{x})$$

skąd to z^2, bo niech $y=0$, to $\sqrt{x} = z$.

Niech $g(x) = w_1 x + w_2 z - w_2 \sqrt{x}$

Dla $x \in [0, z^2]$. Szukamy $x \in [0, z^2]$, w którym

$g(x)$ ma minimum na tym przedziale.

Postąpimy teraz standardowo, jak chcą Państwo.

NASZ KLIENT NASZ PAN.

A więc najpierw policzymy pochodną funkcji

$g(x)$ poza $x=0$ (DLACZEGO. Otrzymujemy

$$g'(x) = w_1 - \frac{w_2}{2\sqrt{x}}$$

i przyrównujemy ją

do 0, aby otrzymać punkt krytyczny.

Stąd otrzymamy

$$\underline{x} = \frac{w_2^2}{4 w_1^2}$$

. Zauważmy, że $\underline{x} > 0$.

Przekonamy się, że w $\underline{x}$ jest minimum globalne, analizując monotoniczność funkcji $g(x)$

Mikroekonomia, wykład 8 w Internecie

$g'(x)$ przyjmuje wartości dodatnie, czyli funkcja $g(x)$ jest rosnąca, gdy

$$w_1 - \frac{w_2}{2\sqrt{x}} > 0, \text{ tzn.}$$

$$x > \frac{w_2^2}{4w_1^2}$$

$g'(x)$ przyjmuje wartości ujemne, czyli funkcja $g(x)$ jest malejąca, gdy

$$x < \frac{w_2^2}{4w_1^2}$$

Stąd w punkcie krytycznym $\underline{x}$ $g(x)$ osiąga minimum globalne.

Pozostaje teraz sprawdzić, czy $\underline{x} \in [0, z^2]$.

Tzn. czy $\frac{w_2^2}{4w_1^2} \leq z^2$

tzn. czy $\frac{w_2}{2w_1} \leq z$

Stąd minimum funkcji $g(x)$ jest w $\underline{x}$, gdy $z \geq \frac{w_2}{w_1}$ oraz

$$g(\underline{x}) = w_1 \cdot \frac{w_2^2}{4w_1^2} + w_2 z - w_2\sqrt{\frac{w_2^2}{4w_1^2}} = \frac{w_2^2}{4w_1} + w_2 z - \frac{w_2^2}{2w_2} =$$

$$= w_2 z - \frac{w_2^2}{4w_1}$$

Gdy $z < \frac{w_2}{2w_1}$ funkcja $g(x)$ osiąga minimum w prawym końcu czyli w z^2, ponieważ, co

Mikroekonomia, wykład 6 w Internecie

pokazaliśmy wyżej oraz w przedziale $[0, z^2]$ $g(x)$ jest malejąca

$$g(z^2) = w_1 z^2 + w_2 z - w_2 z = w_1 z^2$$

Funkcja kosztów jest wówczas postaci

$$c(z) = \begin{cases} w_2 z - \frac{w_2^2}{4w_1}, & \text{gdy } z \geq \frac{w_2}{2w_1} \\ w_1 z^2, & \text{gdy } z < \frac{w_2}{2w_1} \end{cases}$$

Teraz zajmiemy się optymalizacją zysków firmy

Czyli szukamy $\max_{z>0} \pi(z) = \max_{z>0} (pz - c(z))$, gdzie

p jest ceną za jednostkę gotowego produktu

$$\pi(z) = \begin{cases} p \cdot z - w_2 z + \frac{w_2^2}{4w_1}, & \text{gdy } z \geq \frac{w_2}{2w_1} \\ pz - w_1 z^2, & \text{gdy } z < \frac{w_2}{2w_1} \end{cases}$$

Szukamy maksimum w obu przypadkach.

1. $z \geq \frac{w_2}{2w_1}$

$$\pi(z) = (p - w_2) z + \frac{w_2^2}{4w_1}$$

Dla $p > w_2$ $\pi(z)$ jest funkcją liniową rosnącą

oznacza, to, że im więcej firma wyprodukuje tym więcej zysku. Załóżmy, że $z \leq Z$. Wtedy maksimum funkcji $\pi(z)$ jest w Z. Maksymalny zysk, to

$$\pi(Z) = (p - w_2) Z + \frac{w_2^2}{4w_1}$$

| ~~nnngeneracja~~ ~~funkcja zpodaży firmy~~

a funkc. podaży ~~s~~ $s(p, w_1, w_2) = Z$

Dla $p = w_2$

$\pi(z) =$ funkcja stała

$$\pi(z) = \frac{w_2^2}{4w_1}$$

Produkcja nie przynosi producentowi ani zysku ani straty.
Co powinien on wtedy zrobić?

Dla $p < w_2$

$\pi(z)$ jest funkcją liniową malejącą, co oznacza, że produkcja generuje stratę.
Co najlepiej wówczas zrobić. NIC i podaż jest zerowa

2. $z < \frac{w_2}{2w_1}$

$$\pi(z) = pz - w_1 z^2$$

Szukamy, w którym punkcie $\pi(z)$ osiąga maksimum globalne. Obliczamy pochodną funkcji $\pi(z)$:

$$\pi'(z) = p - 2w_1 z$$

i przyrównujemy ją do zera, szukając punktu krytycznego funkcji $\pi(z)$

$p - 2w_1 z = 0$, gdy $2w_1 z = p$, tzn $z = \frac{p}{2w_1}$

Funkcja $\pi(z)$ jest funkcją malejącą, gdy

$p - 2w_1 z < 0$, tzn.

$$z > \frac{p}{2w_1}$$

Funkcja $\pi(z)$ jest rosnąca gdy $p-2w_1z>0$, tzn.

$$z < \frac{p}{2w_1}$$

Stąd maksimum jest w punkcie krytycznym $= \frac{p}{2w_1}$

Do obliczenia nie trzeba było pochodnej, ale chciałem zrobić tak, jak Państwo to lubią.

Bo $\pi(z) = pz - w_1z^2$ to trójmian, gdzie przy z^2 jest $-w_1$, a więc liczba ujemna i jej wykres ma postać

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{p}{-2w_1} = \frac{p}{2w_1}$$

Musimy sprawdzić, czy punkt krytyczny

$$z \in \left(0, \frac{w_2}{2w_1}\right)$$

Tzn., czy $\frac{p}{2w_1} < \frac{w_2}{2w_1}$

Tzn. czy $p < w_2$.

Gdy tak jest, to maksymalny zysk

$$\pi\left(\frac{p}{2w_1}\right) = p\,\frac{p}{2w_1} - w_1\,\frac{p^2}{4w_1^2} = \frac{p^2}{4w_1}$$

Funkcja podaży w tym przypadku jest postaci

$$s(p, w_1, w_2) = \frac{p}{2w_1}$$

$p \geq w_2$

$\Pi(z)$ jest funkcją rosnącą na przedziale $\left(0, \frac{w_2}{2w_1}\right)$

Załóżmy, że $z \leq Z$, gdzie $Z < \frac{w_2}{2w_1}$. Wtedy

$\Pi(z)$ ma maksimum w punkcie Z i maksymalny

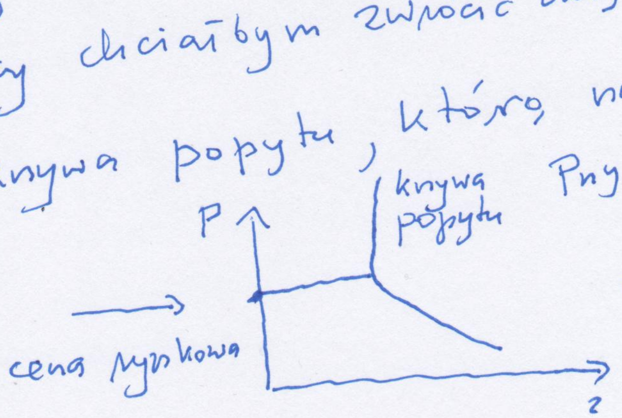
zysk to $\Pi(Z) = pZ - w_1 Z^2$ i funkcja podaży

jest postaci

$$S(p, w_1, w_2) = Z.$$

Dalej Varian przy mówieniu o firmie na rynku konkurencyjnym (czy doskonale konkurencyjnym). Matematycznie oznaczało, że cena p za jednostkę gotowego produktu jest dana, zajmuje się różnymi ważnymi ~~...~~ ekonomicznie rzeczami, które są ważne, ale matematyka mało interesują np. bada krzywe kosztów i ~~k~~ koszty jakoś tam dzieli. Chciałym tu z rynkiem konkurencyjnym skończyć, ale na parę rzeczy chciałbym zwrócić uwagę

1. krzywa popytu, którą napotyka firma



Przy cenie > cena rynkowa firma nie sprzeda nic
przy cenie < cena rynkowe przejmie cały popyt rynkowy, o ile może to zrobić

2. Rynkowa funkcja podaży (nazywana czasem funkcją gałęzi (albo krzywą rynkową podaży czy gałęzi) To suma podaży wszystkich działających na rynku firm produkujących ten produkt.

3. Gdy na rynku jest swoboda wejścia, to powoduje to, że, jak mówią ekonomiści, "zyski są spychane do zera. Niekiedy obecnie w wielu miejscach nie ma swobody wejścia, na przykład są licencje, które udziela administracja i zyski do zera nie są spychane.

Teraz chciałbym opowiedzieć o całkowicie odmiennej niż rynek doskonale konkurencyjny formie rynku, czyli o monopolu na rynku wyrobów gotowych, czyli jest tylko jeden producent. Choć mówi się, że na przykład Microsoft jest monopolistą, to nie jest prawdziwy monopol. Prawdziwy monopol był w PRL, gdzie państwo miało monopol na produkcję pewnych rzeczy (przykładowo spirytusu). Monopol był też w tzw II Rzeczypospolitej np. tylko państwo mogło produkować zapałki i zakazało przemyt zapalniczek z Niemiec, bo zyski ze sprzedaży zapałek, to spora część dochodów państwa wtedy była.