Mikroekonomia, wykład 8 w Internecie

Kontynuujemy mówienie o modelach duopolu. Na ostatnim wykładzie mówiłem o modelu, gdzie mamy lidera i naśladowcę ilościowego i cenowego. Teraz przejdziemy do modelu, gdy obie firmy podejmują decyzje jednocześnie, nie wiedząc, jak zachowa się druga firma. Będzie to przykład tzw. gry jednoczesnej, gdzie mamy dwóch graczy.

Rozpoczniemy od sytuacji, gdy dwie firmy jednocześnie ustalają swoją produkcję. Jest to tzw model Cournota, na cześć matematyka francuskiego z 19 wieku, który się takimi zagadnieniami zajmował.

Zaczynamy od założenia, że firma pierwsza oczekuje (np. patrząc, ile druga firma dotychczas produkowała), że firma druga będzie wytwarzała z_2^e jednostek produktu (e oznacza oczekiwaną produkcję). Jeśli firma pierwsza decyduje się wytwarzać z_1 jednostek produktu, to znaczy, że oczekuje, że ogólna produkcja wyniesie $Z = z_1 + z_2^e$, a cena rynkowa $p(Z) = p(z_1 + z_2^e)$, gdzie $p(\cdot)$ to odwrócona funkcja popytu rynkowego. Tu, jak poprzednio, zakładamy, że obie firmy sprzedają tak samo dobre (albo, jak ktoś woli: tak samo złe). Jaki problem

Mikroekonomia, wykład 8 w Internecie

maksymalizacji zysku?– ma teraz firma pierwsza. Szuka ona $\max_{z_1} [p(z_1 + z_2^e) z_1 - c_1(z_1)]$, gdzie $c_1(\cdot)$ to funkcja kosztów firmy pierwszej.

Załóżmy, bo różnie z tym bywa, że dla każdego oczekiwanego przez firmę pierwszą poziomu produkcji firmy drugiej tj. z_2^e będzie istniał jakiś optymalny poziom firmy pierwszej, powiedzmy $\underline{z}_1$. Zapiszmy tę zależność między oczekiwaną produkcją firmy drugiej i optymalnym wyborem firmy pierwszej jako:

$$\underline{z}_1 = f(z_2^e)$$

Funkcja f jest po prostu funkcją reakcji, podobną do funkcji reakcji rozpatrywanych poprzednio.

Podobnie możemy (o ile istnieje) wyprowadzić funkcję reakcji drugiej firmy

$\underline{z}_2 = f(z_1^e)$, która opisuje optymalny wybór dokonany przez firmę drugą na oczekiwaną produkcję firmy pierwszej, tj. z_1^e

Mikroekonomia, wykład 8 w Internecie

Przypomnijmy teraz, że każda firma wybiera własny poziom produkcji, zakładając, że produkcja drugiej firmy wyniesie odpowiednio z_1^e albo z_2^e. Przy dowolnych wartościach z_1^e oraz z_2^e tak jednak nie musi być – z reguły optymalny poziom produkcji firmy pierwszej będzie różny od oczekiwań firmy drugiej dotyczących produkcji firmy pierwszej

Co zaproponował ~~Cournot~~ Cournot:

Poszukajmy takiej kombinacji (z_1^*, z_2^*) poziomów produkcji, przy której optymalny poziom produkcji firmy pierwszej – przy założeniu, że firma druga wytwarza z_2^* wynosi z_1^*, a optymalny poziom produkcji firmy drugiej – przy założeniu, że firma pierwsza pozostaje przy z_1^* – wynosi z_2^*. Tzn. mamy

$$z_1^* = f_1(z_2^*)$$

i

$$z_2^* = f_2(z_1^*),$$

gdzie f_1 i f_2 to odpowiednie funkcje reakcji

Taka kombinacja poziomów produkcji jest znana jako równowaga Cournota

W równowadze Cournota każda firma wybiera jako optymalny poziom produkcji, o którym druga firma sądzi, że zostanie wybrany. W punkcie równowagi Cournota żadna firma nie będzie powodów do zmiany poziomów produkcji, gdy zobaczy wybór dokonany przez drugą firmę.

Dochodzenie do równowagi Cournota

Opiszemy tu w skrócie, jak może wyglądać proces dochodzenia do równowagi Cournota. Po dodaniu odpowiednich założeń można by te sformułować twierdzenie.

Niech w okresie pierwszym firmy wytwarzają produkcję na poziomach (z_1^1, z_2^1), indeks na dole, która firma, indeks na górze oznacza okres. Poziomy nie muszą być poziomami równowagi Cournota.

Niech w okresie drugim firmy oczekują, że te druga nie zmieni swej produkcji, tj.

$$z_1^2 = f_1(z_2^1)$$

i $$z_2^2 = f_2(z_1^1),$$ gdzie f_1 i f_2 to funkcje reakcji załóżmy, że te funkcje spełniają pewne warunki (są Lipschitza), a więc w szczególności są ciągłe i mamy

$$z_1^{n+1} = f_1(z_2^n)$$
$$z_2^{n+1} = f_2(z_1^n)$$

i niech ciągi z_1^n oraz z_2^n zbiegają:

$z_1^n \longrightarrow \underline{z}_1$ oraz

$z_2^n \longrightarrow \underline{z}_2$ i, jak mówiłem f_1, f_2 są ciągłe.

Mikroekonomia, wykład 8 w Internecie

-5-

Mamy wówczas

$$\underline{z_1} = f_1(\underline{z_2})$$

oraz $\underline{z_2} = f_2(\underline{z_1})$,

czyli para $(\underline{z_1}, \underline{z_2})$ jest równowagą Cournota.

Jednoczesne ustalanie ceny (model Bertranda).

Tu w Varianie jest najbardziej niejasny moment
(a do oryginalnej pracy Bertranda nie mam wglądu.
J. Bertrand to był bardzo dobry matematyk i byle
jakich rzeczy nie pisał.)

Otóż wg Variana w modelu Bertranda cena
równowagi, to cena, która jest równa kosztowi
krańcowemu. Ale koszty krańcowe, to jest pochodna
funkcji kosztów (o ile istnieje) i takich cen może być
wiele. Zauważmy, że badając rynek konkurencyjny,
zakładaliśmy, że cena za jednostkę gotowego produktu
p jest dana i pokazywaliśmy, że gdy maksimum
zysku firmy $pz - c(z)$ jest osiągane dla jakiegoś $\underline{z}$, to
(niech istnieje $c'(z)$) $c'(\underline{z}) = p$. I to wszystko.
Sposób przedstawienia modelu Bertranda u Variana jest
wyjątkowo niejasny. Niech dane są funkcje kosztów obu firm
i załóżmy, że są one równe. Firma pierwsza patrzy
na swoje zyski, gdy ustali cenę p. To $pz - c_1(z)$, gdy
(wy)produkuje ~~p~~ z. I interesują ją tylko te ceny p
przy której zysk jest >0.

Tu nie przedstawiłem żadnego rozwiązania modelu Bertranda, chciałem tylko zwrócić uwagi na niejasności przedstawiania tego modelu w Varianie. Kto zaproponuje tu jakieś rozwiązanie?

W końcu chciałbym przejść do ostatniego modelu duopolu, czyli zmowy (to przykład gry kooperacyjnej). Tutaj firmy wybierają ilości tak, aby zmaksymalizować zyski ogólne (czyli obu) firm, a potem się tym zyskiem jakoś dzielą.

Problem maksymalizacji zysku (przy duopolu). To szukam

$$(*) \quad \max_{z_1, z_2} \left[p(z_1+z_2)(z_1+z_2) - c_1(z_1) - c_2(z_2) \right]$$

I teraz warto przejrzeć konkretne sytuacje mamy 2 firmy i konkretne funkcje kosztów i konkretna odwrócona funkcja popytu rynkowego i szukamy maksimum w (*), a potem patrzymy, czy nie opłaca się nam partnera oszukać proponując inny niż wynika z (*) poziom produkcji.

To o czym mówiłem ostatnio, to wiąże się z teorią gier. Ponieważ obowiązek zaliczania elementów teorii gier został dla specjalności ekonomicznej zlikwidowany opowiem tu o elementarnej teorii gier, który powinni znać wszyscy

Tu opowiem o elementarzu gier dwuosobowych, nie muszą to być gry o sumie zerowej, tzn., że gdy jeden wygrywa, to płaci drugiemu.

Rozpocznę od bardzo prymitywnej gry: Mamy dwóch graczy A i B

Osoba A będzie pisała na kawałku papieru jeden z dwóch wyrazów "góra" albo "dół". Jednocześnie osoba B na kawałku papieru niezależnie będzie pisała "lewa" albo prawa

Za chwilę napiszę coś, co się nazywa macierzą wypłat dla tej gry, tzn. ile w zależności od decyzji podjętych przez obu graczy każdy zyska

W poniższej macierzy pierwsza liczba jest wypłatą dla A, a druga wypłatą dla B. A oto macierz wypłat naszej gry

		Gracz B	
		Lewa	Prawa
	Góra	1,2	0,1
Gracz A	Dół	2,1	1,0

Przykładowo: jeśli A napisał dół a B napisał Prawa, to A otrzyma 1, a B otrzyma 0 itd

Jaki będzie wynik powyższej gry? Gra ta ma proste rozwiązanie. Z punktu widzenia A najlepiej jest napisać Dół, bo niezależnie od decyzji B jego wygrane są zawsze większe. Z kolei z punktu widzenia B najlepiej jest napisać Lewa, bo niezależnie od decyzji A jego wygrane są zawsze większe

Mówimy o takiej sytuacji, że gra ma strategię dominującą: istnieje optymalny wybór dla każdego z graczy niezależnie od tego, co zrobi drugi gracz. Oczywiście że gra ma proste rozwiązanie, strategię dominującą i w takie gry nie warto grać.

Ale zwrócę uwagę Państwu na pewne stare twierdzenie, które udowodnił Zermelo. Dotyczy to takich gier, jak szachy, że gracze po kolei wykonują ruchy i drugi z nich to widzi i są skończone, choć b. duża liczba strategii. W szachach możliwy jest remis, więc trudno tu mówić o strategii wygrywającej dla jakiegoś z graczy, ale można udowodnić, że dla jednego z graczy istnieje strategia nieprzegrywająca. Ale jak ona wygląda? W grze w szachy jest tyle możliwości, że nie jest prosto ją opisać. Ale dowód tego twierdzenia, wymyślony przez pracującego kiedyś u nas Jana Mycielskiego (obecnie w USA), będący zarazem jego sformułowaniem, to jedna linijka.

Niestety gry ze strategią dominującą (gdy nie ma remisów) są rzadkie.

Rozpatrzmy taką grę: są A (który pisze Góra albo Dół) i B (który pisze Lewa, Prawa), ale mamy inną macierz wypłat. Oto ona:

Mikroekonomia, wykład 8 w Internecie

		Gracz B	
		Lewa	Prawa
Gracz A	Góra	2,1	0,0
	Dół	0,0	1,2

Tutaj kiedy B wybiera Lewa, to wypłaty dla A wynoszą 2 albo 0, kiedy B wybiera Prawa, to wypłaty dla A wynoszą 0 albo 1. Oznacza to, że gdy B wybiera Lewa, to A chciałby wybrać Góra. Kiedy B wybiera Prawa, to A chciałby wybrać Dół. Optymalny wybór dla A zależy od tego, jakiego posunięcia się ze strony B.

Może żądanie istnienia strategii dominującej jest zbyt mocne. Zamiast domagać się, by wybór A był optymalny przy wszystkich wyborach B (niezależnie od tego co wybierze B), możemy wymagać, by był optymalny przy optymalnym wyborze B. Jeśli B jest dobrze poinformowanym, inteligentnym graczem, to będzie dokonywać jedynie optymalnych wyborów (Chociaż to co optymalne dla B, będzie zależało od wyborów dokonywanych przez A).

Powiemy, że para strategii stanowi równowagę Nasha (na cześć Johna Nasha, niedawno zginął w wypadku samochodowym.

Mikroekonomia, wykład 8 w Internecie

genialnego matematyka, mającego spory udział nie tylko
w teorii gier. To o nim była książka, a potem film
„Piękny umysł". Za prac z teorii gier Nash w 1951 roku
w 1994r Nash otrzymał nagrodę Nobla z ekonomii.)

Jeżeli wybór A jest optymalny przy danym wyborze
B oraz wybór B jest optymalny przy danym wyborze
A.

Pamiętajmy jednak, że żaden z graczy nie wie, co zrobi
drugi, kiedy dokonuje wyboru. Każdy gracz ma jednak
pewne oczekiwania co do tego, jaki będzie wybór
dokonywany przez drugiego gracza. Równowaga Nasha
może być interpretowana jako para oczekiwań
dokonywanych przez każdego z graczy, przy czym
jeżeli wybór zostanie przez drugą stronę ujawniony,
żadna ze stron nie chce zmieniać swojego zachowania.

W przypadku gry opisanej macierzą wypłat na
stronie 9 wybór Góra, Lewa stanowi równowagę
Nasha. Aby to udowodnić zauważmy, że jeżeli A wybiera
Góra, to najlepszą rzeczą dla B jest wybór Lewa,
bo wtedy wypłata dla B wynosi 1, a przy
wyborze Prawej 0. Dalej, jeśli B gra Lewa, to
najlepiej dla A jest wybranie Góra, bo wtedy
otrzyma wyższą wypłatę. Równowaga Nasha
jest uogólnieniem równowagi Cournota, opisywanej
poprzednio. Pojęcie równowagi Nasha jest logiczne, ale ma
i swoje problemy. Przykładowo może istnieć
para równowag Nasha