

Lista 1.

Przekształcanie wyrażeń wymiernych i niewymiernych, GP III

1. Rozłożyć na czynniki:

$$x^2 - x - 6, \quad x^2 - 3x - 10, \quad 2x^2 - 5x - 12, \quad 6x^2 - 13x + 6.$$

2. Sprawdzić wzory:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \quad (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3,$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b), \quad a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2), \quad a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3),$$

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1}).$$

3. Rozłożyć na czynniki wyrażenia:

$$a^5 - b^5, \quad a^3 + b^3, \quad a^5 + b^5,$$

$$xy + yz + x + z, \quad ax^2 - bx^2 + bx - ax + a - b, \quad a^5 - a^3 + a^2 - 1,$$

$$bc(b + c) + ca(c - a) - ab(a + b), \quad (a - b)(p - a)(p - b) + bp(p - b) - ap(p - a),$$

$$y^3(a - x) - x^3(a - y) + a^3(x - y),$$

$$x(y^2 - z^2) + y(z^2 - x^2) + z(x^2 - y^2), \quad (b - c)^3 + (c - a)^3 + (a - b)^3.$$

4. Uprościć wyrażenia:

$$\frac{x^2 + \frac{1}{x}}{x + \frac{1}{x} - 1}, \quad \frac{1}{(x + y)^2} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right) + \frac{2}{(x + y)^3} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right),$$

$$\frac{a - c}{a^2 + ac + c^2} \cdot \frac{a^3 - c^3}{a^2b - bc^2} \left(1 + \frac{c}{a - c} - \frac{1 + c}{c} \right) : \frac{c(1 + c) - a}{bc},$$

5. Uprościć wyrażenie

$$\frac{1 + (a + x)^{-1}}{1 - (a + x)^{-1}} \left[1 - \frac{1 - (a^2 + x^2)}{2ax} \right],$$

jeśli $x = \frac{1}{a - 1}$.

6. Uprościć wyrażenia:

$$\left(\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}} + \frac{1-a}{\sqrt{1-a^2}-1+a} \right) \cdot \left(\sqrt{\frac{1}{a^2}-1} - \frac{1}{a} \right), \quad 0 < a < 1$$

$$\frac{\left[(a+b)^{-\frac{1}{2}} + (a-b)^{-\frac{1}{2}} \right]^{-1} + \left[(a+b)^{-\frac{1}{2}} - (a-b)^{-\frac{1}{2}} \right]^{-1}}{\left[(a+b)^{-\frac{1}{2}} + (a-b)^{-\frac{1}{2}} \right]^{-1} - \left[(a+b)^{-\frac{1}{2}} - (a-b)^{-\frac{1}{2}} \right]^{-1}}$$

7. Usunąć niewymierność z mianownika:

$$\frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}, \quad \frac{1}{2 + \sqrt{5} + 2\sqrt{2} + \sqrt{10}}, \quad \frac{1}{1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}}, \quad \frac{1}{\sqrt{a + \sqrt{a^2 - b^2}}}$$

8. Wyznaczyć liczby wymierne a, b takie że

$$\sqrt{6 + \sqrt{11}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}, \quad \sqrt{6 - 4\sqrt{2}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}.$$

9. Rozwiązać równania

$$\frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x - \sqrt{x^2 - 1}} + \frac{x - \sqrt{x^2 - 1}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = 34, \quad \sqrt{4x + 2} + \sqrt{4x - 2} = 4,$$

$$\sqrt{y - 2 + \sqrt{2y - 5}} + \sqrt{y + 2 + 3\sqrt{2y - 5}} = 7\sqrt{2},$$

$$\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x} = \sqrt{x}, \quad a \text{ jest parametrem,}$$

10. Rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} x - y = \frac{7}{2} \left(\sqrt[3]{x^2 y} - \sqrt[3]{x y^2} \right), \\ \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = 3, \end{cases} \quad \begin{cases} 5\sqrt{x+y} - \frac{18}{\sqrt{x+y}} = 27, \\ \sqrt{x^2 - y^2} - 5\sqrt{x-y} = 4, \end{cases}$$

11. Rozwiązać nierówności (a jest parametrem):

$$\sqrt{1+x^2} \geq x+1, \quad \sqrt{(x+4)(x-3)} < 6-x, \quad \sqrt{2+x-x^2} > x-4, \quad \sqrt{x-2} + x > 4,$$

$$\sqrt{x+2} > \sqrt{2x-8}, \quad (x-1)\sqrt{x+4} < 2-4x, \quad \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2, \quad x+4a > 5\sqrt{ax}.$$

Podręczniki:

1. B. Gdowski, E. Pluciński, *Zbiór zadań z matematyki dla kandydatów na wyższe uczelnie*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne (**GP**),
2. W. Krywicki, L. Włodarski, *Analiza matematyczna w zadaniach*, PWN (**KW**).