Geologia, lista 2.

Funkcje elementarne (GP IV)

Powtórka z wykładu 1.

1. Udowodnić twierdzenie Pitagorasa.
2. Udowodnić niewymierność liczby $\sqrt{2}$.
3. Wyprowadzić wzór na pierwiastki trójmianu kwadratowego i jego rozkład na czynniki.

Zadania:

1. Rozwiązać równania:

$$6(t^2+t+1)=(t+1)^3-(t-1)^3, \quad (x+a)^2=(x+b)^2, \quad \text{gdzie } a,b\text{–dane liczby},$$

$$(a+x-b)(a-x-b)=(a^2-x)(b^2+x)-a^2b^2, \quad 2|x|-|x+1|=2.$$

2. Rozwązać układy równań

$$\begin{cases} 2x+3|y| &= 13, \\ 3x-y &= 3, \end{cases} \qquad \begin{cases} ax+by &= c^2, \\ \dfrac{a+x}{b} &= \dfrac{b+y}{a}, \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x+ky &= 9, \\ 2kx+18y &= -27, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2y+(a+3)z &= 8, \\ 2x+3y+(a+4)z &= 12, \\ 3x+(6a+5)y+7z &= 20, \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+z &= 6, \\ ax+4y+z &= 5, \\ 6x+(6a+5)y+7z &= 20. \end{cases}$$

4. Rozwiązać równanie:

$$\frac{2x+1}{x+3}-\frac{x-1}{x^2-9}=\frac{x+3}{3-x}-\frac{4+x}{3+x}, \qquad \frac{18y+7}{y^3-1}=\frac{30}{y^2-1}-\frac{13}{y^2+y+1}.$$

5. Liczby x_1, x_2 są pierwiastkami równania $x^2+px+q=0$. Znaleźć równanie kwadratowe, którego pierwiastkami są liczby $x_1+x_2, x_1\cdot x_2$.

6. Rozwiązać nierówności:

$$x<\frac{1}{x}, \qquad \frac{2}{x-1}<\frac{3}{x}, \qquad \frac{14}{x^2-5x+6}<\frac{10}{2-x}-3, \qquad \left|\frac{1}{x+2}\right|<\left|\frac{2}{x-1}\right|.$$

7. Rozwiązać równania. Uwaga: dobrze jest stosować podstawienia, na przykład w przykładzie 8) $a:=2^x$, $b:=3^x$, w przykładzie 9) $a:=3^{\frac{x}{2}}$, $b:=3^{\frac{x}{2}}$.

$$5^x-5^{3-x}=20, \quad 49^x-6\cdot 7^x+5=0, \quad 4^{\sqrt{x-2}}+16=10\cdot 2^{\sqrt{x-2}}, \quad 0,125\cdot 4^{2x-3}=\left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^{-x},$$

$$2^{3x}\cdot 7^{x-2}=4^{x+1}, \quad \frac{3^{\sqrt[3]{x^2}}}{2\cdot 3^{\sqrt[3]{x}-1}}=1,5\ , \quad 4^{x+\sqrt{x^2-2}}-5\cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}}=6,$$

$$8^x + 18^x - 2 \cdot 27^x = 0, \quad 4 \cdot 3^x - 9 \cdot 2^x = 5 \cdot 3^{\frac{x}{2}} \cdot 2^{\frac{x}{2}}, \quad x^{x^2-5x+6} = 1, \quad \sqrt{x^x} = x^{\sqrt{x}}.$$

8. Rozwiązać układy równań. W drugim podstawić $a := x - y$, $b := x + y$.

$$\begin{cases} y^{x^2+x+2} &= 1, \\ x+y &= 3, \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt[x-y]{x+y} &= 2\sqrt{3}, \\ (x+y)2^{y-x} &= 3, \end{cases} \quad \begin{cases} 8^{x-2} \cdot 4^{y+1} &= 16, \\ 2^{2(x-1)} \cdot 8^y &= 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x^{x+y} &= y^{x-y}, \\ x^2 y &= 1. \end{cases}$$

9. Rozwiązać nierówności:

$$x^2 \cdot 2^x + x \cdot 2^{x-1} > 0, \quad (0,5)^{\frac{x+1}{x-1}} > \frac{1}{32}, \quad x^{\frac{3x}{4}} < \left(\sqrt{x}\right)^{x^2-x+1}, \quad (x^2+x+1)^x < 1.$$

10. Korzystając z definicji logarytmu uzasadnić poniższe wzory.

$$\log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2, \quad \log_a x^c = c \log_a x, \quad \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

11. Obliczyć (w ostatnim przykładzie zauważyć, że obie liczby są równe):

$$\log_{3\sqrt{3}} 27, \quad \log_3 5 \cdot \log_{25} 27, \quad 2^{\log_{2\sqrt{2}} 15}, \quad 2^{\log_3 5} - 5^{\log_3 2},$$

12. Wyznaczyć dziedzinę funkcji:

$$y = \log_2 \left[1 - \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 5x + 6)\right], \quad y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} \frac{x}{x^2-1}}, \quad y = \sqrt{\log_x(3-x)}.$$

13. Rozwiązać równania:

$$\log_2(x-2) - \log_2(4-x) = 1 - \log_2(13-x), \quad \log_2 \sqrt{x-5} + \log_2 \sqrt{2x-3} + 1 = \log_2 30,$$

$$\log_3(0,5+x) = \log_3 0,5 - \log_3 x, \quad \frac{1}{1+\log_5 x} + \frac{5}{3-\log_5 x} = 3, \quad \log_2(9-2^x) = 3-x,$$

$$\log_7(\log_3 x) + \log_7(\log_3 x^2 - 1) = 1, \quad \log_4 \{2\log_3 [1 + \log_2(1 + 3\log_2 x)]\} = \frac{1}{2}.$$

14. Rozwiązać układy równań:

$$\begin{cases} 2\log_2 x - \log_2 y &= \log_2 9, \\ 10^{y-x} &= \frac{1}{100}, \end{cases} \quad \begin{cases} x^y &= 9, \\ y &= \log_3 x + 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x^{\log_{10} y} &= 100, \\ \log_y x &= 2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy &= a^2, \\ 2\left(\log_3^2 x + \log_3^2 y\right) &= 5\log_3^2 a^2, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 &= y^5, \\ \log_a \frac{x}{y} &= \frac{\log_a x}{\log_a y}. \end{cases}$$

15. Rozwiązać nierówności:

$$\log_5^2(x-1) - 2\log_5(x-1) > 0, \quad \log_2(x+14) + \log_2(x+2) \geq 6, \quad |3 - \log_2 x| < 1,$$

$$3^{\log_{\frac{1}{2}}(x^2-5x+7)} < 1, \quad \log_{2x+3} x^2 < 1, \quad \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{x+1} < 1 + \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{4-x^2},$$