

Lista 3.

Funkcje trygonometryczne (GP IV/6)

1. Uzasadnić wzory:

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta), \quad \sin \alpha \cdot \sin \beta = -\frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta),$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \sin(\alpha - \beta),$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}, \quad \sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2},$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha, \quad \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha.$$

2. Sprawdzić tożsamości:

$$\frac{\cos \alpha - \cos 3\alpha}{\sin 3\alpha - \sin \alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha, \quad \sin 6\alpha \cdot \operatorname{tg} 3\alpha + \cos 6\alpha = 1, \quad \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2\alpha,$$

$$\cos 2\alpha \cos \alpha - \sin 4\alpha \sin \alpha = \cos 3\alpha \cos 2\alpha, \quad \frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \beta} - \frac{2 \cos(\alpha - \beta)}{\sin \alpha \sin \beta} = \frac{\sin^2(\alpha - \beta)}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta}.$$

3. Obliczyć:

$$\arcsin(\sin \pi/5), \quad \arcsin(\sin 3/2), \quad \arcsin(\sin 3), \quad \sin(\arcsin 2/7), \quad \cos(\arcsin 2/7),$$

$$\operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \frac{7\pi}{8} \right), \quad \cos \left(2 \arcsin \frac{4}{5} \right), \quad \arccos \left(\sin \frac{15\pi}{7} \right).$$

4. Obliczyć: $\sin \frac{1}{12}\pi$, $\cos \frac{1}{12}\pi$, $\sin \frac{7}{12}\pi$, $\cos \frac{7}{12}\pi$, $\sin \frac{1}{8}\pi$, $\cos \frac{1}{8}\pi$, $\sin \frac{9}{8}\pi$, $\cos \frac{9}{8}\pi$.

5. Rozwiązać równania:

$$\sin x + \cos x = 1, \quad \cos 3x = \cos x, \quad 3 \sin x = 2 \cos^2 x, \quad \tan \left(\frac{\pi}{3} - x \right) - \tan x = 0,$$

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}, \quad \cos x - \cos 3x = \sin x - \sin 3x, \quad \operatorname{ctg} x - \cos x = \frac{1 - \sin x}{2 \sin x}.$$

$$\tan x + \tan 2x = \tan 3x, \quad \sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x.$$

Granica i pochodna funkcji (GP VIII, KW V)

6. Mamy daną funkcję rzeczywistą $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Jak wygląda wykres funkcji:

$$-f(x), \quad f(-x), \quad |f(x)|, \quad f(|x|), \quad f(x) + b, \quad f(x - a)?$$

7. Zbadać granice:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{5x}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{x - 1}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{x+1}}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1},$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x - 2x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 3x + 5x^2}{2 - x + 3x^2},$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 4}{x + 2}, \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{x - 2}, \quad \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 1}{2x + 1}, \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}, \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{27 - x^3}{x - 3}, \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{2x - 6},$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(-1)^{[x]}}{x-9}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+ax} - 1}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 25} \frac{\sqrt{x} - 5}{x - 25}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x + 1}}{1 - \sqrt{x + 1}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 25} - 5},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{4x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{3 \sin 2x}, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 5x}{\tan 2x},$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x}{\sin^2 x}, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \cos \frac{\pi}{4}}{\sin x - \sin \frac{\pi}{4}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin \frac{1}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{1 - 3x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin 2x)^{\frac{1}{x}}.$$

8. Obliczyć pochodną danej funkcji z definicji:

$$y = 2x^2 - 3, \quad y = \frac{2}{3x - 5}, \quad y = (x + 2)^3, \quad y = \sqrt{x}, \quad y = \sqrt{x^2 + 1}, \quad y = \sin x.$$

9. Obliczyć pochodną danej funkcji:

$$x^{10}, \quad \sqrt[3]{x^2}, \quad \frac{1}{\sqrt[5]{x^6}}, \quad x^2 \sqrt[4]{x^3}, \quad (2x^3 - 1)(x^2 + 7), \quad \frac{2x^2 - 3x + 1}{x + 2}, \quad \frac{(x - 1)^3}{x},$$

$$\frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}, \quad x \cdot \sin x, \quad \sin x \cdot \cos x, \quad \sin x \cdot \tan x, \quad \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x},$$

$$(x + 3)^5, \quad (x^2 + 5x - 1)^{10}, \quad \sin^5 x, \quad \sin x^5, \quad \sqrt{x^2 - 3x + 7}, \quad \sin(\cos x),$$

$$e^{\cos x}, \quad x e^{\sin x}, \quad \ln x^2, \quad \ln(x^2 + 5), \quad \log_x a, \quad \log_{x^2}(x^4 + 1), \quad \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}),$$

$$x^x, \quad x^{\frac{1}{x}}, \quad (1 + x^2)^{2x+1}, \quad (\sin x)^{\cos x}, \quad 5^{\ln x}, \quad \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x, \quad x^{e^x}.$$