

Lista 4.

Badanie funkcji

1. Zbadać następujące funkcje:

$$y = x^3 + 12x^2 + 36x - 50, \quad y = 2x^3 - 9x^2 - 24x - 12, \quad y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2,$$

$$y = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12, \quad y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1, \quad y = x + \frac{x}{4}, \quad y = \frac{2x}{x^2 + 1},$$

$$y = x\sqrt{4-x^2}, \quad y = \frac{2x+1}{x-4}, \quad y = \frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}, \quad y = \frac{x^3+x}{x^4+x^2+1}, \quad y = -x^3+9x,$$

$$y = \frac{x}{1+x^2}, \quad y = \frac{x^2-x-4}{x-1}, \quad y = \frac{x^2+2x+25}{(x+1)^2}, \quad y = \frac{15x^2-13x-20}{8x^2+10x-7},$$

$$y = x\sqrt{\frac{x}{2-x}}, \quad y = x\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}, \quad y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}, \quad y = x^2(x^2-4)^3, \quad y = xe^x,$$

$$y = x^2 \ln x, \quad y = x - 2 \ln x, \quad y = x^2 \ln \frac{x}{2}, \quad y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}, \quad y = \frac{e^{-x}}{x^2-1}.$$

2. Ze wszystkich prostokątów o średnicy 16 wybrać ten o największym polu.

3. Mamy dany kwadratowy arkusz blachy o boku 36 cm, z którego chcemy odciąć na rogach kwadraty o boku x , a następnie zagiąć wystające prostokąty tak aby otrzymać pudełko. Jakie musi być x żeby pojemność pudełka była największa?

4. W półokrąg o promieniu R wpisać trapez równoramienny, którego podstawą jest średnica okręgu, o jak największym polu.

5. Ze wszystkich trójkątów, dla których suma podstawy i wysokości wynosi 8 wybrać trójkąt o największym polu.

6. Jak wygląda walec o objętości V którego pole powierzchni jest najmniejsze?

7. Spośród walców wpisanych w kulę o promieniu R wybrać ten o największej objętości.

8. Obwód trójkąta równoramiennego jest równy 18. Jakie powinny być jego boki aby objętość bryły powstałej z jego obrotu dookoła a) podstawy, b) wysokości, była największa.

Całka nieoznaczona i oznaczona

9. Obliczyć podane całki nieoznaczone i obliczyć ogólną całkę oznaczoną $\int_a^b f(x) dx$:

$$\int x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 2x + 8 dx, \quad \int (x^3 - 2x^2 - x + 1)(x^2 - 3) dx, \quad \int \frac{x^5 - 3x^{-4}}{x^3} dx, \quad \int \frac{(x^2 - 2)^3}{x^2} dx,$$

$$\int 10^{2-x} dx, \quad \int \cos 2x dx, \quad \int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx, \quad \int \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x} dx,$$

$$\int \frac{x dx}{1+x^2}, \quad \int \frac{x dx}{(x^2+3)^6}, \quad \int \frac{x^2 dx}{a^3+x^3}, \quad \int \sqrt{3x+1} dx, \quad \int \frac{x dx}{\sqrt[3]{2x^2-1}}, \quad \int x\sqrt{1+x^2} dx,$$

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt[5]{x^3+1}}, \quad \int x \cos(2x^2+3) dx, \quad \int x e^x dx, \quad \int \sin^5 x \cos x dx, \quad \int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1+\sin x}},$$

$$\int \cos x \cdot e^{\sin x} dx, \quad \int \frac{x^3 dx}{\cos^2 x^4}, \quad \int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx, \quad \int \frac{x^2 dx}{\cos^2(x^3+1)}, \quad \int \frac{\ln^2 x}{x} dx,$$

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}, \quad \int \frac{e^x dx}{2e^x + 1}, \quad \int x \ln(1+x^2) dx, \quad \int x e^{x^2} (x^2+1) dx.$$

10. Obliczyć pole obszaru ograniczonego parabolą $y = 2x - x^2$ i osią OX .
11. Obliczyć pole obszaru ograniczonego liniami $x = -1$, $x = 2$, $y = 0$ i $y = x^2 + 1$.
12. Obliczyć pole obszaru ograniczonego liniami $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$ i $y = \sqrt{x}$.
13. Obliczyć pole zawarte między parabolami $y = ax^2$ i $x = by^2$, gdzie $a, b > 0$.
14. Obliczyć pole obszaru ograniczonego parabolą $y = x^2$ i prostą $2x - y + 3 = 0$.
15. Obliczyć pole obszaru ograniczonego parabolami $y = x^2$ i $y = \frac{3}{4}x^2 + 9$.
16. Punkt materialny porusza się z prędkością $v(t) = (3t + 2)\text{m/s}$. Jaka drogę przebył w ciągu pierwszych 8 sekund?
17. Punkt materialny porusza się z prędkością $v(t) = (2t + 8/t^2)\text{m/s}$. Jaka drogę przebył w ciągu drugiej sekundy?

18. Obliczyć długość łuków:

$$y^2 = 4x^3, \quad y \geq 0, \quad 0 \leq x \leq \frac{8}{9}, \quad 9y^2 = 4x^3, \quad 0 \leq x \leq 3,$$

19. Obliczyć objętość bryły obrotowej powstałej przy obrocie danej funkcji wokół osi OX :

$$y = 1 - x^2, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad y = \sqrt{\sin x}, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad y = \sin x, \quad 0 \leq x \leq \pi,$$

$$y = -x(x+1)(x-2), \quad 0 \leq x \leq 2, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad -a \leq x \leq a.$$

Podręczniki:

1. B. Gdowski, E. Pluciński, *Zbiór zadań z matematyki dla kandydatów na wyższe uczelnie*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, rozdział VIII.
2. W. Krysiński, L. Włodarski, *Analiza matematyczna w zadaniach*, PWN, rozdziały: 10, 13, 15, 19, 20.1, 20.2, 20.3.