Autoreferat

1. Imię i nazwisko: Wojciech Tadeusz Młotkowski

2. Posiadane dyplomy, stopnie naukowe lub artystyczne - z podaniem podmiotu nadającego stopień, roku ich uzyskania oraz tytułu rozprawy doktorskiej i rozprawy habilitacyjnej lub osiągnięcia stanowiącego podstawę nadania stopnia doktora habilitowanego

- Magister: Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego, 06.1984, tytuł pray magisterskiej *„Klasy Gevrey'a i rachunek symboliczny"*,
- Doktorat: Instytut Matematyczny Poskiej Akademii Nauk, 1990, tytuł rozprawy doktorskiej: *„Funkcje dodatnio określone na iloczynie wolnym grup"*,
- Habilitacja: Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego, 2004, tytuł rozprawy habilitacyjnej: *„Analiza harmoniczna na iloczynach wolnych i zastosowania do wolnej probabilistyki".*

3. Informacja o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych lub artystycznych

doktorant, Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, 01.10.1984–30.09.1988,
asystent, Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego, 01.10.1988–30.09.1990,
adiunkt, Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego, 01.10.1990 do dziś.

Dłuższe wyjazdy

- 04.1992–09.1993 University of New South Wales, research associate,
- 03.2000–09.2000 Sogang University, post doctor fellowship,
- 01–31.03.2014, Université Paris 13, Villetaneuse, visiting professor.

4. 4. Opis najważniejszych osiągnieć naukowych lub artystycznych, o których mowa w art. 227 ust. 1 pkt. 1 lit. a ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. z 2021 r. poz. 478 z późn. zm.). Opis ten winien dotyczyć merytorycznego ujęcia przedmiotowych osiągnieć, jak i w sposób precyzyjny określać indywidualny wkład w ich powstanie, w przypadku, gdy dane osiągnięcie jest dziełem współautorskim, z uwzględnieniem możliwości wskazywania dorobku z okresu całej kariery zawodowej

Motywem przewodnim, który przewija się przez całą moją drogę naukową, jest *dodatnia określoność*. Początkowo badałem tą własność dla pewnych funkcji na iloczynie wolnym grup, w szczególności na grupie wolnej, później dla funkcji sferycznych związanych z budynkami Titsa typu $\widetilde{\mathcal{A}}_2$. W dalszym etapie zająłem się nieprzemienną probabilistyką, w szczególności wolną, jej uogólnieniami i aspektami kombinatorycznymi. Korzystając z tych metod udało mi się udowodnić, że pewne ciągi liczbowe, ważne z punktu widzenia kombinatoryki (w szczególności ciągi typu Fussa-Catalana), są dodatnio określone, czyli są ciągami momentów miar probabilistycznych na $\mathbb{R}$.

Do najważniejszych swoich osiągnięć zaliczam:

- Charakteryzacja dodatnio określonych funkcji zależnych od typu na iloczynie wolnym grup dyskretnych ([M4], po doktoracie) w tym charakteryzacja funkcji ekstremalnych, wraz z konstrukcją odpowiednich reprezentacji ([M23] po habilitacji).
- Własność Kazhdana dla grup działających na budynkach Titsa typu $\widetilde{\mathcal{A}}_2$, wraz z wyliczeniem dokładnej stałej Kazhdana, [M17], [M18], po doktoracie, przed habilitacją.

- Uogólnienie wolnej niezależności, czyli pojęcie Λ-wolnej niezależności, dowód dodatniości iloczynu Λ-wolnego stanów, centralne twierdzenie graniczne: prace [M9], [M10], po habilitacji.
- Wzór kombinatoryczny łączący wolne (i warunkowo wolne) kumulanty ze współczynnikami Jacobiego, praca [M12], oraz zastosowanie do charakteryzacja wolnych rozkładów Meixnera, praca [M26], po habilitacji.
- Udowodnienie dodatniej określoności dla ciągów typu Fussa-Catalana $\frac{r}{np+r}\binom{np+r}{n}$, dla $p \geq 1$, $0 \leq r \leq p$, głównie praca [M14], ale również [M28], [M31], [M32], [M39], po habilitacji.

4.1. Dodatnio określone funkcje typu na iloczynie wolnym grup. Jeśli $\{G_i\}_{i\in I}$ jest rodziną grup dyskretnych to iloczyn wolny $G = *_{i\in I} G_i$ składa się z elementów postaci $x := g_1 \ldots g_n$, gdzie $n \geq 0$, $g_k \in G_{i_k} \setminus \{e\}$, $i_k \in I$ oraz $i_1 \neq i_2 \neq \ldots \neq i_n$. Dla takiego elementu $x \in G$ definiujemy jego *typ* $t(x) := (i_1, \ldots, i_n)$ oraz *długość blokową* $\|x\| := n$. Zbiór wszystkich możliwych typów, czyli ciągów $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$, $n \geq 0$, $i_k \in I$, $i_1 \neq i_2 \neq \ldots \neq i_n$, oznaczam przez $S(I)$. W szczególności gdy $G_i = \mathbb{Z}$ dla wszystkich $i \in I$ to G jest grupą wolną i w tym przypadku można zdefiniować inną długość: $|x| := |g_1| + \ldots + |g_n|$. Analiza harmoniczna na grupie wolnej była intensywnie rozwijana w latach 80 szczególnie przez szkołę włoską (Figa-Talamanca, Picardello, Mantero, Zappa, Mauceri, Pagliacci, de Michele) i wrocławską (Bożejko, Pytlik, Szwarc). Badania na iloczynie wolnym grup zostały zainicjowane pracą Iozzi-Picardello [11], którzy badali funkcje blokowo radialne (czyli zależne od blokowej długości) na iloczynie wolnym grup o tej samej mocy. W tym przypadku funkcje blokowo radialne o nośniku skończonym tworzą algebrę przemienną, a funkcjonały multyplikatywne zadane są przez tak zwane funkcje sferyczne.

W pracach [M1,M2,M4,M5,M24] skupiłem się na funkcjach zależnych od typu (czyli takich, że jeśli $t(x) = t(y)$ to $f(x) = f(y)$), bez żadnych założeń na moce $|G_i|$. Główne wyniki są w pracach [M4] i [M24]. W pierwszej udowodniłem, że jeśli funkcja $G \to \mathbb{C}$ jest stała na elementach o tym samym typie, czyli jest postaci $\phi \circ t$ dla pewnej $\phi : S(I) \to \mathbb{C}$, to jej dodatnia określoność na G jest równoważna jej dodatniej określoności ϕ na pewnej algebrze $\mathcal{A}(\tau)$ funkcji na zbiorze typów $S(I)$. Algebra $\mathcal{A}(\tau)$ jest określona przez pewien splot który zależy od funkcji $\tau(i) := 1/(|G_i| - 1)$. W przypadku, gdy wszystkie G_i są skończone oznacza to, że $\phi \circ t$ jest dodatnio określona na G wtedy i tylko wtedy gdy nierówność $\sum_{x,y\in G} \phi(t(y^{-1}x))f(x)\overline{f(y)} \geq 0$ zachodzi dla wszystkich funkcji $f : G \to \mathbb{C}$ o nośniku skończonym które są zależne od typu. W pracy [M24], wspólnej z W. Hebischem, badaliśmy reprezentacje odpowiadające funkcjom zależnym od typu. Główny wynik jest następujący: jeśli π jest $*$-reprezentacją algebry $\mathcal{A}(\tau)$ to istnieje reprezentacja unitarna $\widetilde{\pi}$ grupy G, działająca na większej przestrzeni Hilberta, taka, że jeśli funkcja $\phi : S(I) \to \mathbb{C}$ jest współczynnikiem π to $\phi \circ t : G \to \mathbb{C}$ jest współczynnikiem $\widetilde{\pi}$. Ponadto, jeśli π jest nieprzywiedlna i nie jest zawarta w reprezentacji regularnej $\mathcal{A}(\tau)$ to $\widetilde{\pi}$ jest nieprzywiedlna. Jeden z wniosków jest następujący: jeśli $\phi \circ t : G \to \mathbb{C}$ jest unormowaną ($\phi(t(e)) = 1$) dodatnio określoną funkcją zależną od typu, która jest ekstremalna w wypukłym zbiorze unormowanych dodatnio określonych funkcji zależnych od typu, to $\phi \circ t$ jest ekstremalna w zbiorze *wszystkich* unormowanych funkcji dodatnio określonych na G, *o ile* $\phi \circ t$ nie jest klasy $\ell^2(G)$, przy czym mogą istnieć co najwyżej dwie takie funkcje.

Prace [M1,M2,M4,M5] są autorskie, praca [M24] była napisana wspólnie z Waldemarem Hebishem, od którego pochodzi główna idea pracy. Szczegóły dowodów były opracowane wspólnie, przy czym rozdział 7 jest głównie mojego autorstwa, jak równie redakcja całości pracy.

4.2. Własność Kazhdana dla grup działających na budynkach typu $\widetilde{\mathcal{A}}_2$. Grupy automorfizmów działające w sposób prosty tranzytywny na budynkach Titsa typu $\widetilde{\mathcal{A}}_2$ zostały opisane w pracach Cartwrighta i współautorów [5], [6]. Udowodnili oni, że każda taka grupa Γ ma prezentację specjalnego typu, związaną z geometrią skończonej płaszczyzny rzutowej, zbiór P punktów tej płaszczyzny jest zbiorem generatorów Γ, przy czym $|P| = q + 1$, gdzie q jest rzędem płaszczyzny rzutowej. W pracy [M18] rozwijamy analizę harmoniczną na takich grupach: badamy przemienną algebrę $\mathcal{A}$ funkcji (funkcje biradialne) o nośniku skończonym na Γ, dowodzimy, że $\mathcal{A}$ jest generowana przez $h := |P|^{-1}\sum_{p\in P}\delta_p$, przy czym $h * h^* = h^* * h$, opisujemy funkcjonały multiplikatywne na $\mathcal{A}$ (funkcje sferyczne), wyliczamy spektrum Σ_q funkcji h w domknięciu $\mathcal{A}$ w normie operatorowej na $\ell^2(\Gamma)$ (które jest pewną hypocykloidą o trzech wierzhołkach na płaszczyźnie zespolonej $\mathbb{C}$, wraz z wnętrzem, której wielkość zależy od rzędu q) i miarę Plancherela. Wszystkie wyniki były otrzymane wspólnie, całość pracy była zredagowana przez Cartwrighta.

W [M17] wyliczamy spektrum Σ_q^* funkcji h w domknięciu $\mathcal{A}$ w pełnej C^*-algebrze $C^*(\Gamma)$. Zbiór Σ_q^* można opisać jako pewien obszar płaszczyzny zespolonej („zaokrąglony trójkąt") wraz z trzema punktami izolowanymi, jeden z nich, $z = 1$, odpowiada reprezentacji trywialnej grupy Γ. Przez ϵ_q oznaczyliśmy odległość punktu 1 od reszty zbioru Σ^*. Następnie udowodniliśmy, że grupa Γ ma własność (T) Kazhdana ([12], [10], [2]), przy czym stała Kazhdana względem zbioru generatorów P wynosi $\kappa(\Gamma, P) = \sqrt{2\epsilon_q}$. Praca [M16] rozwiązuje 2 problemy postawione w książce [10]: 1) Udowodniliśmy własność (T) dla grupy dyskretnej bez odwoływania się do teorii krat w półprostych grupach Liego, 2) Podaliśmy przykład grupy dyskretnej G i jej zbioru generatorów S dla której można wyliczyć dokładną wartość stałej Kazhdana $\kappa(G, S)$. Wszyskie wyniki były otrzymane wspólnie, Proposition 4.1 jest mojego autorstwa.

4.3. W pracy [M9] wprowadziłem i badałem następujące pojęcie które nazwałem Λ-wolną niezależnością: niech $(\mathcal{A}, \phi)$ będzie nieprzemienną przestrzenią probabilistyczną, to znaczy $\mathcal{A}$ jest C^*-algebrą z jedynką, a ϕ jest ustalonym stanem. Niech $\mathcal{A}_i$, $i \in I$, będzie rodziną podalgebr, taką że $1 \in \mathcal{A}_i$. Niech Λ będzie ustaloną rodziną podzbiorów 2-elementowych zbioru I. Mówimy, że rodzina $\mathcal{A}_i$, $i \in I$, jest Λ-wolna jeśli

- $ab = ba$ jeśli $a \in \mathcal{A}_i$, $b \in \mathcal{A}_j$ oraz $\{i, j\} \in \Lambda$,
- $\phi(a_1 a_2 \ldots a_n) = 0$ o ile $n \geq 1$, $\phi(a_k) = 0$, $a_1 \in \mathcal{A}_{i_1}, \ldots, a_n \in \mathcal{A}_{i_n}$, oraz słowo $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ jest Λ-zredukowane, to znaczy używając dopuszczalnych przestawień: $(i, j) \mapsto (j, i)$ o ile $\{i, j\} \in \Lambda$, nie jest możliwe takie przestawienie wyrazów ciągu $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ by obok siebie występowały takie same elementy (i, i).

W przypadku gdy Λ jest zbiorem pustym otrzymujemy wolną niezależność Voiculescu, natomiast gdy Λ jest rodziną wszystkich podzbiorów 2-elementowych I to mamy niezależność klasyczną (tensorową).

W pracy [M9] udowodniłem, konstruując odpowiednią reprezentację, że mając daną dowolną rodzinę $(\mathcal{A}_i, \phi_i)$, $i \in I$, nieprzemiennych przestrzeni probabilistycznych oraz rodzinę Λ podzbiorów 2-elementowych zbioru I, można skonstruować dużą przestrzeń probabilistyczną $(\mathcal{A}, \phi)$, taką że $\mathcal{A}_i$ jest podalgebrą $\mathcal{A}$, $\phi|_{\mathcal{A}_i} = \phi_i$ oraz rodzina $\mathcal{A}_i$, $i \in I$, jest Λ-wolna w $(\mathcal{A}, \phi)$.

Udowodniłem też wersję centralnego twierdzenia granicznego, gdzie z zależności od wyboru rodziny Λ możemy otrzymać rozkład q-zdeformowany Gaussa. W pracy [M10] w podobny sposób badałem Λ-Boolowską niezależność. W tym przypadku miara granicza w centralnym twierdzeniu granicznym, zależna od parametru q, została opisana tylko przy pomocy współczynników Jacobiego, jej jawna postać nie jest znana.

4.4 Z każdą miarą probabilistyczną μ na $\mathbb{R}$, której wszystkie momenty $s_n(\mu) := \int_{\mathbb{R}} x^n \mu(dx)$, $n = 0, 1, \ldots$, są skończone, związane są różne ciągi liczbowe, które opisują własności μ a często ją charakteryzują. W szczególności wolne kumulanty $r_n(\mu)$ mają tą własność, że $r_n(\mu_1 \boxplus \mu_2) = r_n(\mu_1) + r_n(\mu_2)$, $n = 1, 2, \ldots$, gdzie $\boxplus$ oznacza wolny splot addytywny. Z kolei współczynniki Jacobiego β_n, γ_n, $n \geq 0$, wyznaczają ciąg wielomianów ortogonalnych względem miary μ poprzez rekurencję

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + \beta_n P_n(x) + \gamma_{n-1} P_{n-1}(x),$$

z warunkiem początkowym $P_0(x) := 1$. W pracy [M12] podałem wzór kombinatoryczny pozwalający wyliczyć wolne kumulanty ze współczynników Jacobiego.

Niech $\beta_n(t), \gamma_n(t)$ oznacza współczynniki Jacobiego dla wolnej potęgi splotowej $\mu^{\boxplus t}$ (która jest dobrze określona dla $t \geq 1$). Funkcje $\beta_n(t), \gamma_n(t)$ są zawsze wymierne względem t. W pracy [M27] wykorzystaliśmy wyniki z [M12] i udowodniliśmy, że jeśli wszystkie funkcje $\beta_n(t), \gamma_n(t)$ są wielomianami to $\beta_1 = \beta_2 = \ldots$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots$, czyli μ należy do wolnej klasy Meixnera. Mój wkład do pracy [27] to dowody dwóch ważnych twierdzeń: Twierdzenia 1 i Twierdzenia 6 oraz współudział w dowodach pozostałych wyników.

4.5 Liczby Catalana $\frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{n}$ pojawiają w wolnej probabilistyce jako momenty rozkładu Marchenko-Pastura, który w tej teorii jest odpowiednikiem rozkładu Poissona, oraz jako parzyste momenty rozkładu Wignera (odpowiednik rozkładu normalnego). Ich uogólnieniem są liczby Fussa-Catalana $\binom{np+1}{n}\frac{1}{np+1}$. Mają one dwie ciekawe własności (wzory (5.58) i (5.59) w [9]): funkcja tworząca $\mathcal{B}_p(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \binom{np+1}{n} \frac{z^n}{np+1}$ spełnia równanie

$$\mathcal{B}_p(z) = 1 + \mathcal{B}_p(z)^p \tag{1}$$

oraz zachodzi wzór Lamberta:

$$\mathcal{B}_p(z)^r = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{np+r}{n} \frac{rz^n}{np+r}. \tag{2}$$

Nasuwają się naturalne pytania: Dla jakich parametrów $p, r \in \mathbb{R}$ ciąg $\binom{np+r}{n}\frac{r}{np+r}$ jest dodatnio określony? Czy odpowiadające im rozkłady mają związki z wolną probabilistyką? W pracy [M14] udowodniłem następujące

Twierdzenie 1. Jeśli $p \geq 1$, $0 < r \leq p$ to ciąg $\binom{np+r}{n}\frac{r}{np+r}$ jest dodatnio określony.

Ciąg $\binom{np+r}{n}\frac{r}{np+r}$ jest też dodatnio określony dla $r = 0$ bo wtedy jest równy $(1, 0, 0, \ldots)$ oraz dla $p \leq 1$, $p - 1 \leq r < 0$, co wynika ze wzoru $\binom{np+r}{n}\frac{r(-1)^n}{np+r} = \binom{n(1-p)-r}{n}\frac{-r}{n(1-p)-r}$. Dlatego od tej pory będziemy zakładać, że $p, r > 0$. W dowodzie korzystałem z metod wolnej probabilistyki. Oznaczając odpowiednią miarę probabilistyczną przez $\mu(p, r)$ udowodniłem między innymi, że wolna R- i S-transformata $\mu(p, r)$ jest równa odpowiednio

$$R_{\mu(p,r)}(z) = \mathcal{B}_{p-r}(z)^r - 1, \qquad S_{\mu(p,r)}(z) = \frac{(1+z)^{1/r} - 1}{z}(1+z)^{(r-p)/r}.$$

We wspólnej pracy z Pensonem i Życzkowskim [M28] podaliśmy nowy dowód Twierdzenia 1, w którym używaliśmy splotu Mellina rozkładów typu beta. Ponadto gęstości miar $\mu(p, r)$ wyrazilliśmy poprzez funkcje Meijera, a w kilku przypadkach poprzez funkcje elementarne. Mój wkład do [M28] to dowód ważnych wyników: lematu 2.2 i twierdzenia 2.3, udział w dowodach wszystkich wyników.

W pracy z Pensonem [M31] udowodniliśmy, że prawdziwa jest również odwrotna implikacja: jeśli $p, r > 0$ to ciąg $\binom{np+r}{n}\frac{r}{np+r}$ jest dodatnio określony wtedy i tylko wtedy gdy $p \geq 1$ i $0 < r \leq p$, oraz że analogiczne twierdzenie zachodzi dla współczynników dwumianowych $\binom{np+r-1}{n}$.

W pracy [M14] udowodniłem ponadto, że jeśli $0 < 2r \leq p$ i $r+1 \leq p$ to miara $\mu(p, r)$ jest nieskończenie podzielna względem addytywnego splotu wolnego. W pracy [M39] pokazaliśmy, że również rozkłady $\mu(p, p)$ dla $1 \leq p \leq 2$ są nieskończenie podzielne, co więcej, w tym szczególnym przypadku miary te są też samorozkładalne względem wolnego splotu, oba wyniki są mojego autorstwa (podrozdziały 3.1, 3.2).

Po publikacji [M14] pojawiły się również inne dowody Twierdzenia 1: Liu i Pego [15], Forrestera i Liu [8] oraz Zhu [18], a praca [M14] ma wiele cytowań: w MathSciNet (44), w Web of Science (51) oraz w OEIS (55).

5. Opis pozostałych osiągnięć naukowych lub artystycznych, niewymienionych w pkt. 4.

• *Nieujemna linearyzacja wielomianów ortogonalnych.* Dla ciągu wielomianów ortogonalnych $P_n(x)$ zadanych przez rekurencję:

$$xP_n(x) = \alpha_n P_{n+1}(x) + \beta_n P_n(x) + \gamma_{n-1} P_{n-1}(x),$$

$P_0(x) := 1$, gdzie współczynniki $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ spełniają: $\beta_n \in \mathbb{R}$, $\alpha_n, \gamma_n > 0$, *współczynniki linearyzacyjne* są zdefiniowane następująco:

$$P_m(x)P_n(x) = \sum_k g(m, n, k)P_k(x).$$

W pracy [M19] podaliśmy warunek wystarczający na to aby wszystkie współczynniki $g(m, n, k)$ były nieujemne. Jeden z wniosków jest następujący: jeśli ciąg β_n jest rosnący oraz $\alpha_n\gamma_n \leq (\beta_{n+2} - \beta_{n+1})^2$ dla każdego $n \geq 0$ to wszystkie współczynniki $g(n, m, k)$ są nieujemne. W pracy są dwa dowody głównego twierdzenia, jeden z nich (rozdział 3) jest mojego autorstwa. Podobną tematyką zajmowałem się również w pracy [M13].

• *Splot warunkowo wolny.* Niech $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ będzie rodziną zespolonych $*$-algebr z jedynką, na każdej z nich są ustalone dwa stany ϕ_i, ψ_i. Bożejko, Leinert i Speicher [3] udowodnili, rozszerzając konstrukcję Voiculescu [17] iloczynu wolnego reprezentacji, że na iloczynie wolnym $\mathcal{A} := *_{i\in I}\mathcal{A}_i$ istnieją stany ϕ, ψ takie, że $\phi|_{\mathcal{A}_i} = \phi_i$, $\psi|_{\mathcal{A}_i} = \psi_i$ oraz

$$\phi(a_1a_2\ldots a_n) = \phi_{i_1}(a_1)\phi_{i_2}(a_2)\ldots\phi_{i_n}(a_n), \qquad \psi(a_1a_2\ldots a_n) = 0$$

o ile $n \geq 1$, $a_k \in \mathcal{A}_{i_k}$, $\psi_{i_k}(a_k) = 0$ oraz $i_1 \neq i_2 \neq \ldots \neq i_n$. Używając tej konstrukcji można zdefiniować łączne i przemienne działanie, zwane splotem warunkowo wolnym, na parach rozkładów w taki sposób, że jeśli $a \in \mathcal{A}_i$ ma rozkład μ_1 względem ϕ_i i rozkład ν_1 względem ψ_i oraz $b \in \mathcal{A}_j$ ma rozkład μ_2 względem ϕ_j i rozkład ν_2 względem ψ_j, $i \neq j$, to $(\mu_1, \nu_1) \boxplus_c (\mu_2, \nu_2) = (\mu, \nu)$ o ile $a + b \in \mathcal{A}$ ma rozkład μ względem ϕ i rozkład ν względem ψ. Warto wspomnieć, że $\nu = \nu_1 \boxplus \nu_2$ oraz że jeśli $\nu_1 = \nu_2 = \delta_0$ to $\nu = \delta_0$ oraz $\mu = \mu_1 \uplus \mu_2$, gdzie $\uplus$ oznacza splot Boolowski. W pracy [M8] udało mi się rozszerzyć te wyniki, dopuszczając że stany ϕ_i, ϕ są o wartościach operatorowych na ustalonej przestrzeni Hilberta. W konsekwencji otrzymujemy łączne i przemienne działanie na parach miar (μ, ν), przy czym pierwsza miara jest o wartościach operatorowych na ustalonej przestrzeni Hilberta. To pozwala na zdefiniowanie splotu Boolowskiego $\uplus$ dla takich miar. Udowodniłem w szczególności, że jeśli E, F są miarami spektralnymi ograniczonych operatorów samosprzężonych A, B to $E \uplus F$ jest miarą spektralną operatora $A + B$. W pracy [M7] podałem jeszcze ogólniejszą konstrukcję reprezentacji, która prowadzi do większej rodziny stanów.

• *Liczby Avala.* Liczby

$$e_n(k_0, \ldots, k_{p-1}) := \frac{n - k_0 - \ldots - k_{p-1}}{n} \prod_{i=0}^{p-1} \binom{n-1+k_i}{k_i},$$

gdzie $n \geq 1$, $k_0, \ldots, k_{p-1} \geq 0$, $k_0 + \ldots + k_{p-1} < n$, pojawiły się w pracy Avala [1] jako uogólnienie liczb ballotowych $\frac{n-k}{n+k}\binom{n+k}{n}$. Aval udowodnił, że $e_n(k_0, \ldots, k_{p-1})$ jest równe liczbie ciągów $(x_1, \ldots, x_N)$ takich, że: 1) $x_i \in \{1, -p\}$, 2) wszystkie sumy częściowe $S_j := x_1 + x_2 + \ldots + x_j$ są nieujemne, 3) $x_N = 1$, 4) p dzieli sumę S_N, 5) liczba wyrazów równych 1 jest równa np oraz 6) k_r jest liczbą takich j że $x_j = -p$ i p dzieli $S_j - r$.

W pracy [M15] udowodniłem, że w otoczeniu $z = 0$ funkcja tworząca

$$F(z) := \sum_{n=1}^{\infty} z^n \sum_{\substack{k_0,\ldots,k_{p-1} \geq 0 \\ k_0+\ldots+k_{p-1}<n}} e_k(k_0, \ldots, k_{p-1}) a_0^{k_0} \ldots a_{p-1}^{k_{p-1}},$$

z parametrami $a_i \in \mathbb{R}$, jest odwrotna do

$$w \mapsto z = \frac{w(1 + w - a_0 w) \ldots (1 + w - a_{p-1} w)}{(1+w)^{p-1}}.$$

W konsekwencji udowodniłem, że jeśli $a_i > 0$ to ciąg

$$s_n := \sum_{\substack{k_0,\ldots,k_{p-1} \geq 0 \\ k_0+\ldots+k_{p-1}<n}} e_k(k_0, \ldots, k_{p-1}) a_0^{k_0} \ldots a_{p-1}^{k_{p-1}},$$

$s_0 := 1$, jest ciągiem momentów rozkładu który jest postaci

$$\mu(a_0) \boxtimes \mu(a_1) \boxtimes \ldots \boxtimes \mu(a_{p-1}),$$

gdzie $\boxtimes$ oznacza wolny splot multyplikatywny, a $\mu(a)$ oznacza następujący rozkład:

$$\mu(a) := \frac{\sqrt{4ax - x^2}}{2\pi x(1 - x + ax)} \chi_{(0,4a)} dx + \mathrm{atom}(a),$$

gdzie $\mathrm{atom(a)} = \frac{1-2a}{1-a}\delta_{1/(1-a)}$ jeśli $0 < a < 1/2$, $\mathrm{atom(a)} = 0$ dla $a \geq 1/2$.

• *Liczby typu Eulera.* W pracy [M32] wprowadziliśmy następującą definicję liczb Eulera typu D: Przez $\mathcal{B}_n$, $\mathcal{D}_n$, $\widetilde{\mathcal{D}}_n$ będziemy oznaczać zbiór ciągów $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ takich że $\sigma_i \in \mathbb{Z}$, $(|\sigma_1|, \ldots, |\sigma_n|)$ jest pemutacją zbioru $\{1, \ldots, n\}$, oraz liczba wyrazów ujemnych w ciągu $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ jest odpowiednio dowolna, parzysta, nieparzysta. Definiujemy

$$\mathrm{desc}(\sigma) := \#\{k : 1 \leq k \leq n, \sigma_{k-1} < \sigma_k\},$$

gdzie $\sigma_0 := 0$, oraz

$$D(n, k) := \#\{\sigma \in \mathcal{D}_n : \mathrm{desc}(\sigma) = k\}, \qquad \widetilde{D}(n, k) := \#\{\sigma \in \widetilde{\mathcal{D}}_n : \mathrm{desc}(\sigma) = k\}.$$

Zbadaliśmy szereg własności liczb $D(n,k)$, $\widetilde{D}(n,k)$. Zaraz po publikacji w arXiv praca [M32] została odnotowana w encyklopedii OEIS, gdzie pojawiły się nowe artykuły: $A262226$ z liczbami $D(n,k)$ oraz $A262227$ z liczbami $\widetilde{D}(n,k)$.

W pracy [M36] badaliśmy z kolei liczbę $B(n,k,j)$ takich permutacji $\sigma \in \mathcal{B}_n$ że $\mathrm{desc}(\sigma) = k$ i liczba ujemnych wyrazów wynosi j. Udowodniliśmy między innymi, że liczby $b(n,k,j) := B(n,k,j)/\binom{n}{k}$ też są całkowite i że $b(n,k,j)$ jest liczbą permutacji $\sigma = (\sigma_1,\ldots,\sigma_{n+1}) \in \mathcal{S}_{n+1}$ takich, że $\sigma_1 = j+1$. Liczby te były badane przez Congera [7].

Obie prace są rozszerzoną wersją prac magisterskich moich magistrantek, przy czym dodatkowo są w nich moje wyniki: twierdzenia 2.1, 3.1, 4.10 w [M32], rozdziały 4,5,6 w [M36].

• *Rodziny CSK.* Naturalną rodziną wykładniczą (natural exponential family, NEF) generowaną przez rozkład ν nazywamy rodzinę miar probabilistycznych postaci

$$\{\exp\big(\theta x - k_\nu(\theta)\big)\nu(dx)\}_\theta,$$

gdzie $k_\nu(\theta) := \log\big(\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(\theta x)\nu(dx)\big)$, a θ jest takie że $k_\nu(\theta) < \infty$. W podobny sposób Bryc [4] wprowadził pojęcie Cauchy-Stielties Kernel (CSK) family zastępując funkcję $\exp(\theta x)$ przez funkcję $1/(1-\theta x)$ Dla każdej takiej rodziny, generowanej przez rozkład ν, definiuje się funkcję $\mathbb{V}_\nu(m)$-wariancja jako funkcja wartości średniej, przy czym funkcja $\mathbb{V}(m)$ definiuje daną rodzinę jednoznacznie. Zbiór wszystkich takich funkcji $\mathbb{V}_\nu(m)$ odpowiadającym rozkładom ν o nośniku zwartm, średniej 0 i wariancji 1 oznaczymy $\mathcal{V}$, symbolem $\mathcal{V}_\infty$ oznaczymy zbiór tych $\mathbb{V} \in \mathcal{V}$ dla których $\mathbb{V}(cm) \in \mathcal{V}$ dla każdego $c \in \mathbb{R}$. Używając metod wolnej probabilistyki udowodniliśmy w pracy [M37] między innymi następujące twierdzenie (które jest odpowiednikiem klasycznych wyników Morrisa [14] i Letaca-Mory [13] dla NEF):

Twierdzenie. Wielomian $\mathbb{V}(m) = 1 + am + bm^2 + cm^3$ jest w klasie $\mathcal{V}$ wtedy i tylko wtedy gdy $(b+1)^3 \geq 27c^2$. Co więcej, $\mathbb{V} \in \mathcal{V}_\infty$ wtedy i tylko wtedy gdy $b^3 \geq 27c^2$.

Udowodniliśmy też, że $\mathbb{V}_\nu \in \mathcal{V}_\infty$ wtedy i tylko wtedy gdy ν jest nieskończenie podzielna względem addytywnego splotu wolnego. Mój wkład to udział w dowodach twierdzeń z rozdziałów 2 i 4 oraz opracowanie ważnego przykładu (podrozdział 4.1).

• *Quadratic Embedding Constant.* Dla grafu nieskierowanego spójnego $G = (V,E)$ Obata i Zakiyyah [16] zdefiniowali współczynnik:

$$\mathrm{QEC}(G) := \sup\{\langle f, Df\rangle : f \in C_0(V), \langle f,f\rangle = 1, \langle \mathbf{1}, f\rangle = 1\}$$

(*quadratic embedding constant*), gdzie D oznacza macierz odległości grafu G: $D := (d(u,v)_{u,v\in V})$, $d(u,v)$ oznacza naturalną odległość wierzchołków $u,v \in V$, $C_0(V)$ znacza zbiór wszystkich funkcji $f : V \to \mathbb{R}$ o nośniku skończonym, $\mathbf{1}$ oznacza funkcję stale równą 1 na V, a $\langle\cdot,\cdot\rangle$ oznacza iloczyn skalarny: $\langle f,g\rangle := \sum_{u\in V} f(u)g(u)$. Warunkowa ujemna określoność macierzy D jest równoważna temu że $\mathrm{QEC}(G) \leq 0$. Wiele przykładów zostało przeliczonych w [16] i w nowszych pracach Obaty i jego współautorów. Główne wyniki pracy [M38] to

1) oszacowanie $\mathrm{QEC}(G)$ dla grafu G który jest $*$-produktem grafów $G_1,\ldots,G_n$, jeśli znamy $\mathrm{QEC}(G_k)$, gdzie $*$-produkt oznacza, że w każdym grafie G_k wybieramy ustalony wierzchołek v_k, a następnie utożsamiamy wszystkie v_k, „sklejając" grafy G_k w jeden graf G, oraz

2) udowodnienie że $\mathrm{QEC}(\mathbb{Z}) = -1/2$, gdzie $\mathbb{Z}$ traktujemy jako graf z krawędziami $\{n, n+1\}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Pierwszy wynik udowodniliśmy wspólnie, drugi jest mojego autorstwa.

W mojej nowszej pracy [M16] wyliczyłem dokładną wartość stałej QEC dla grafów postaci $P_n = (V, E)$, $V := \{1, 2, \ldots, n\}$, $E := \big\{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \ldots, \{n-1, n\}\big\}$ („odcinki”):

$$\mathrm{QEC}(P_n) = \frac{-1}{1 + \cos(\pi/n)}.$$

Ważnym krokiem w dowodzie była charakteryzacja tych par $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ dla których macierz $[\min\{i, j\} + s + t \cdot \delta_{i,j}]_{i,j=1}^n$ jest dodatnio określona.

6. Opis osiągnięć dydaktycznych, organizacyjnych i popularyzujących naukę lub sztukę.

6.1. *Osiągnięcia organizacyjne:*

- udział w organizacji wielu konferencji,
- udział w redakcji dwóch tomów Banach Center Publications: **73** *Quantum probability. Proceedings of the 25th QP Conference on Quantum Probability and Related Topics held in Będlewo, June 20–26, 2004* oraz **78** *Noncommutative harmonic analysis with applications to probability. Papers from the 9th Workshop held in Będlewo, September 29–October 10, 2006*,
- od wielu lat jestem przewodniczącym wydziałowej komisji rekrutacyjnej na studia magisterskie na kierunek matematyka.

6.2. *Osiągnięcia dydaktyczne:*

- promotor 21 prac licencjackich, 65 prac magisterskich i jednej pracy doktorskiej,
- autorskie wykłady dla studentów: analiza 1, algebra liniowa, matematyka dla studentów chemii, matematyka dla studentów geologii, matematyka dla studentów biotechnologii, analiza i topologia, kombinatoryka.

6.3. *Osiągnięcia popularyzatorskie:* brak.

Literatura

[1] J.-C. Aval, *Multivariate Fuss–Catalan numbers,* Discrete Math. 308 (2008), 4660–4669.

[2] Bekka, Bachir; de la Harpe, Pierre; Valette, Alain, *Kazhdan's property (T),* New Mathematical Monographs, 11. Cambridge University Press, Cambridge, 2008.

[3] M. Bożejko, M. Leinert and R. Speicher, *Convolution and limit theorems for conditionally free random variables,* Pacific J. Math. 175 (1996), 357–388.

[4] W. Bryc, *Free exponential families as kernel families,* Demonstr. Math. 42 (3) (2009), pp. 657–672.

[5] Cartwright, Donald I.; Mantero, Anna Maria; Steger, Tim; Zappa, Anna, *Groups acting simply transitively on the vertices of a building of type A 2. I,* Geom. Dedicata 47 (1993), no. 2, 143–166.

[6] Cartwright, Donald I.; Mantero, Anna Maria; Steger, Tim; Zappa, Anna, *Groups acting simply transitively on the vertices of a building of type A 2. II. The cases q=2 and q=3,* Geom. Dedicata 47 (1993), no. 2, 167–223.

[7] M. Conger, *A Refinement of the Eulerian numbers, and the Joint Distribution of* $\pi(1)$ *and* $Des(\pi)$ *in* S_n*,* Ars Combin. 95 (2010), 445–472.

[8] Forrester, Peter J.; Liu, Dang-Zheng, *Raney distributions and random matrix theory,* J. Stat. Phys. 158 (2015), no. 5, 1051–1082.

[9] R. L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik, *Concrete mathematics,* Addison-Wesley 1994.

[10] de la Harpe, Pierre(CH-GENV); Valette, Alain(CH-NCH) *La propriété (T) de Kazhdan pour les groupes localement compacts (avec un appendice de Marc Burger),* Astérisque No. 175 (1989), 158 pp.

[11] Iozzi, Alessandra; Picardello, Massimo A., *Spherical functions on symmetric graphs,* Harmonic analysis (Cortona, 1982), 344–386, Lecture Notes in Math., 992, Springer, Berlin, 1983.

[12] Kazhdan, D., *Connection of the dual space of a group with the structure of its closed subgroups,* Funct. Anal. Appl. 1 (1967), 63–65.
[13] G. Letac and M. Mora, *Natural real exponential families with cubic variance functions,* Ann. Statist. 18 (1) (1990), pp. 1–37.
[14] C. N. Morris, *Natural exponential families with quadratic variance functions,* Ann. Statist. 10 (1) (1982), pp. 65–80.
[15] Liu, Jian-Guo; Pego, Robert L., *On generating functions of Hausdorff moment sequences,* Trans. Amer. Math. Soc. 368 (2016), no. 12, 8499–8518.
[16] Obata N. and Zakiyyah A. Y., *Distance matrices and quadratic embedding of graphs,* Electron. J. Graph Theory Appl. 6 (2018), 37–60.
[17] D. Voiculescu, *Symmetries of some reduced free product C^*-algebras,* in: Operator Algebras and their Connections with Topology and Ergodic Theory (Buşteni, 1983), Lecture Notes in Math. 1132, Springer, 1985, 556–588.
[18] Zhu, Bao-Xuan, *Hankel-total positivity of some sequences,* Proc. Amer. Math. Soc. 147 (2019), no. 11, 4673–4686.

(podpis wnioskodawcy)