Wykład z analizy

Tydzień 1.

Liczby Wymierne I

Ćwiczenia

c1.1 Sprawdzić następujące równości w każdym kroku wymieniając postulat, z którego się korzysta. (a) $0+(0+0)=0$, (b) $7+(-7)=(-6)+6$, (c) $(-273)+1\neq -273$.

c1.2 Niech $\mathcal{Q}^+$ oznacza zbiór dodatnich liczb wymiernych. Które postulaty są spełnione gdy $\mathcal{Q}$ zastąpimy przez $\mathcal{Q}^+$?

c1.3 (a) Niech $abc=2$. Ile wynosi $a^5b^5c^5$? (b) Niech $n\in\mathbf{Z}$. Ile wynosi $(-1)^{2n}$? (c) Czy $(2^3)^2=2^{3^2}$?

c1.4 (a) Obliczyć $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^8}$. (b) Dla $a\neq 1,-1$ udowodnić, że $1+a^2+a^4+a^6+\cdots+a^{18}=\frac{1-a^{20}}{1-a^2}$.

c1.5 (a) Co wynika z $a\leqslant b$, $b\leqslant c$ i $c\leqslant a$? (b) Co wynika z $a\leqslant b$ i $b\neq a$? (c) Co wynika z $a\leqslant b$ i $c\leqslant b$?

c1.6 Rozwiązać nierówności (a) $x-10>2-2x$, (b) $x+6\leqslant 5-3x$, (c) $2x+11>10-6x$.

c1.7 (a) $6-2x\leqslant 3x+1\leqslant 9-5x$ (b) $2x-3<5x+3<2x+3$.

Zadania

z1.1 Znaleźć wzór na $1-b+b^2-b^3+\cdots-b^{21}$. Czy zachodzi on dla wszystkich b?

z1.2 Obliczyć $1+2+\frac{1}{3}+4+\frac{1}{9}+\cdots+2^8+\frac{1}{3^8}$

z1.3 Obliczyć

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^{1000}}-1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^{100}}.$$

z1.4 Dla jakich x mamy $(x^2+1)^{-1}<1$?

z1.5 Podać dowody dla stwierdzeń (2), (4), (5), (6) w 1.13.

z1.6 Rozwiązać nierówności (a) $2x^2-2\leq x^2-x$, (b) $x^2+3x>-2$.