Wykład z analizy

Tydzień 10.

Pochodne wyższych rzędów

Ćwiczenia

c10.1 Obliczyć pochodne funkcji:
(a) $f(s) = s^{\frac{2}{3}} + 3s^{\frac{1}{4}} - 2s^{-3}$, (b) $y = z^{\frac{5}{2}} - (z^2+1)^{\frac{2}{3}}$, (c) $u \to \frac{u^{\frac{1}{3}} - 2u^{\frac{1}{2}}}{u^{\frac{2}{5}} + 3u}$ (d) $\frac{d}{dz}\left(\frac{\sqrt{z}+2}{\sqrt[3]{z^3-1}}\right)$

c10.2 Zróżniczkować funkcję
(a) $g(w) = (w^{\frac{2}{3}} + 1)(w^{\frac{1}{2}} - w^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{2}}$, (b) $f(t) = (\sqrt[5]{t^3-1} + t^2)(\sqrt{t} - 1)^4$.

c10.3 Pokazać, że funkcja $x \to \sqrt{|x|}$ jest różniczkowalna w każdym punkcie poza 0 oraz ,że $f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{|h|}}{h}$ nie istnieje.

c10.4
(a) Niech $y = x^3 - x^2 + 3x + 1$. Znaleźć $\frac{d^2y}{dx^2}$. (b) Znaleźć trzecią pochodną funkcji $z \to z^{\frac{5}{2}} - 2z^{\frac{2}{3}} + z$. (c) Znaleźć drugą pochodną funkcji $u \to (1 - \sqrt{u})^5$.

c10.5 Dla następujących funkcji znaleźć przedziały, w których funkcja rośnie i przedziały, w których funkcja maleje.
$f(x) = \sqrt{1+x^3}$ (b) $h(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$ (c) $g(y) = \frac{y}{3} + y^{\frac{2}{3}} - 8y^{\frac{1}{3}}$ (d) $f(x) = x^2(x-1)^{\frac{1}{3}}$.

Zadania

z10.1 Podać dowód Twierdzenia 10.7 w przypadku $f'(x) < 0$ i twierdzenia 10.9 w przypadku $f'(x) \leqslant 0$.

z10.2
(a) Niech $f(0) = 2$, $f'(0) = -4$, $f''(0) = \frac{1}{5}$, $g(0) = 10$, $g'(0) = 2$, $g''(0) = -1$. Znaleźć $(f \cdot g)''(0)$.
(b) Niech $G(x) = H(x)^3$, $H(1) = 2$, $H'(1) = \frac{1}{3}$, $H''(1) = \frac{1}{4}$. Znaleźć $G''(1)$.
(c) Niech $\phi(s) = \sqrt{1 - \psi(s)}$ oraz $\psi(-2) = -3$, $\psi'(-2) = 3$, $\psi''(-2) = 5$. Znaleźć $\phi''(-2)$.

z10.3 Niech $h(x) = x^2 + x + \sqrt{x}$. Znaleźć k-tą pochodną funkcji h dla $k = 1, 2, 3, \ldots$.

z10.4 (a) Niech $f(x) = \frac{2x^2+x+1}{3x^2+1}$. Znaleźć przedziały w których funkcja f maleje i przedziały w których funkcja f rośnie. Naszkicować wykres funkcji f. (b) Niech

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}.$$

Znaleźć przedziały w których funkcja g maleje.

z10.5 Udowodnić twierdzenia 10.6. i 10.7. korzystając z twierdzenia o wartości średniej.