Wykład z analizy

Tydzień 11.

Maksima i minima funkcji

Ćwiczenia

c11.1 Znaleźć maksimum i minimum funkcji
(a) $f(x) = \frac{x^2+5}{x+2}$ w przedziale $[0, 10]$.
(b) $f(x) = \frac{x^2+5}{x+2}$ w przedziale $[0, +\infty)$.
(c) $f(x) = \frac{2+x-x^2}{2-x+x^2}$ w przedziale $[-4, 4]$

c11.2 Niech $h(z) = \frac{z^3}{z^4+27}$. Znaleźć przedziały, w których funkcja h jest rosnąca i przedziały, w których h jest malejąca. Znaleźć maksimum funkcji h.

c11.3 Niech $f(x) = x^3 - 12x + 11$. Znaleźć punkty gdzie f ma lokalne minima i maksima, oraz przedziały gdzie f jest wypukła i wklęsła. Naszkicować wykres funkcji f.

c11.4 Niech $f(x) = \frac{|x|}{x^2+1}$. Znaleźć punkty gdzie f ma lokalne minima i maksima, oraz przedziały gdzie f jest wypukła i wklęsła. Naszkicować wykres funkcji f.
Wskazówka. Rozważyć osobno przedział $(-\infty, 0)$ i przedział $(0, +\infty)$.

c11.5 Niech $f(x) = (x^2 + x + 1)^{\frac{1}{3}}$. Znaleźć punkty gdzie f ma lokalne minima i maksima, oraz przedziały gdzie f jest wypukła i wklęsła. Naszkicować wykres funkcji f.

Zadania

z11.1 Udowodnić drugą implikację w twierdzeniu 11.4

z11.2 Udowodnić, że dla każdego $n \in \mathbf{Z}$ funkcja $x \to x^n$ jest kawałkami monotoniczna. Wywnioskować stąd, że funkcja $x \to x^{\frac{1}{n}}$ jest też kawałkami monotoniczna.

z11.3 Podać przykład funkcji ciągłej na przedziale $(0, 1)$, która ma lokalne maksimum i nie przyjmuje maksimum na tym przedziale.

z11.4 Ilość gazu produkowana przez piec w gazowni przy temperaturze $500°$ wynosi $3m^3$ na minutę (m^3/min) i wzrasta o $0,1m^3$ na minutę przy podniesieniu temperatury pieca o $1°$ w przedziale do $[500°, 800°]$. Powyżej $800°$ ilość gazu produkowana zwiększa się do $0,15m^3/min$ na każdy stopień wzrostu temperatury. Koszt utrzymania pieca w temperaturze T przez godzinę wynosi $500 + (T - 50)^2$ zł. $1m^3$ gazu gazownia sprzedaje za 1 zł. Przy jakiej temperaturze produkcja gazu jest najbardziej opłacalna?

z11.5 Korytarz o szerokości 90 cm przecina się pod kątem z szerokim korytarzem. Ośmiometrowy kij jest przesuwany wąskim korytarzem po podłodze. Jak szeroki musi być szeroki korytarz aby można było kij przepchać po podłodze do szerokiego korytarza i przesuwać go dalej szerokim korytarzem.