Wykład z analizy

Tydzień 13.

Całka I

Ćwiczenia

c13.1 Obliczyć całki używając odpowiedniego podstawienia, sprawdzić wynik przez zróżniczkowanie.
(a) $\int \frac{dt}{\sqrt{3+5t}}dt$, (b) $\int \left(2t-\frac{1}{t^2}\right)\sqrt{t^2+\frac{1}{t}}dt$ (c) $\int x^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{2}{3}}+1)^{\frac{1}{2}}dx$, (d) $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{y}}}{\sqrt{y}}dy$

c13.2 Obliczyć całki. Przykształcić wyrażenie pod całką tak aby można było zastosować odpowiednie podstawienie. Sprawdzić wynik przez zróżniczkowanie.
(a) $\int \frac{v(1+\sqrt{v^2+4})^3}{\sqrt{v^2+4}}dv$, (b) $\int \frac{t^{\frac{1}{3}}-1)^6}{t^{\frac{1}{3}}}dt$, (c) $\int \frac{t^2-t}{(2t-1)^4}dt$, (d) $\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{1}{3}}-1)^{\frac{3}{2}}}$.

c13.3 (a) Obliczyć $\int_0^1(x^2+1)dx$ z błędem nie przekraczającym $0,1$. (b) Obliczyć $\int_{0,1}^{0,2} x^2dx$ z błędem nie przekraczającym $0,002$. (c) Obliczyć $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ z błędem nie przekraczającym $\frac{1}{4}$

c13.4 Używając kalkulatora do obliczania pierwiastka obliczyć $\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}dx$ z błędem nie przekraczającym $0,05$.

c13.5 Używając kalkulatora do obliczania pierwiastka obliczyć $\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ z błędem nie przekraczającym $0,05$.

Zadania

z13.1 Niech φ będzie funkcją prostą. Uzasadnić wzór $\int_a^b \varphi(2x)dx = \frac{1}{2}\int_{2a}^{2b}\varphi(t)dt$

z13.2 Niech φ będzie funkcją prostą. Uzasadnić wzór $\int_a^b \varphi(\alpha x)dx = \frac{1}{\alpha}\int_{\alpha a}^{\alpha b}\varphi(t)dt$ dla dowolnej liczby $\alpha > 0$.

z13.3 Udowodnić, że dla funkcji prostych φ_1 i φ_2 mamy $\int_a^b(\varphi_1(x)+\varphi_2(x))dx = \int_a^b \varphi_1(x)dx + \int_a^b \varphi_2(x)dx$

z13.4 Niech $f : [0,1] \ni x \to \int_0^x tdt$. Korzystając z faktu, że $\int_a^b g(t)dt$ jest polem pod wykresem funkcji g, podać wzór na funkcję f.