Wykład z analizy

TYDZIEŃ 16.

DŁUGOŚĆ KRZYWEJ

ĆWICZENIA

c16.1 Znaleźć długość wykresu funkcji pomiędzy zadanymi punktami
(a) $f(x) = (x+1)^{3/2}$ pomiędzy $x = 3$ $x = 8$,
(b) $f(x) = x^{2/3} - 1$ pomiędzy $x = 8$ $x = 27$,
(c) $f(x) = \int_1^x \sqrt{t^2 - 1}\, dt$ pomiędzy $x = 1$ $x = 3$.
(d) $f(x) = \frac{1}{3}(x^2 + 2)^{3/2}$ pomiędzy $x = \sqrt{2}$ $x = \sqrt{7}$,
(e) $f(x) = \int_1^x (t + \frac{1}{t} + 1)^{\frac{1}{2}}\, dt$ pomiędzy $x = 1$ $x = 4$,

c16.2 Znaleźć liczby: (a) $\arccos\frac{1}{2}$, (b) $\arcsin\frac{1}{2}$, (c) $\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}$.

c16.3 Obliczyć pochodne funkcji f: (a) $f(x) = \arcsin(2x)$, $0 < x < \frac{1}{2}$, (b) $f(x) = \arcsin(\sin 2x)$ (c) $f(x) = (\arccos x)^3$, (d) $f(x) = \sin[\arcsin(2x)]$.

c16.4 Obliczyć $\frac{d}{dx}\big(\arccos\sqrt{1 - x^2}\big)$

ZADANIA

z16.1 Niech $L(a, b)$ oznacza długość łuku górnego półokręgu pomiędzy punktami $P = (a, \sqrt{r^2 - a^2})$ i $Q = (b, \sqrt{r^2 - b^2})$, gdzie $-r \le a < b \le r$. Niech A(a,b) oznacza pole sektora koła POQ. Znaleźć wzory na $L(a, b)$ i $A(a, b)$ analogiczne do tych, które dla $r = 1$ były podane w 16.4.

z16.2 Jak $A(a, b)$ wyraża się przez $L(a, b)$?

z16.3 Znaleźć (a) $\int \frac{du}{\sqrt{1-16u^2}}$, (b)$\int \sqrt{\frac{\arccos z}{1-z^2}} dz$, (c) $\int_{-1}^0 \arccos x\, dx$

z16.4 Znaleźć $\int \frac{dx}{\sqrt{a-bx^2}}$, gdzie a, b są dodatnimi stałymi.

z16.5 Obliczyć (a) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, (b) $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$ (c) $\int_{1/4}^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-t}} \frac{dt}{\sqrt{t}}$.