Wykład z analizy

Tydzień 17.

Funkcje Trygonometryczne II

Ćwiczenia

c17.1 Znaleźć: (a) $\frac{d}{dt}\sin(2t+1)$, (b) $\frac{d}{dx}\cos x^2$, (c) $\frac{d}{dx}\cos^2 x$, (d) $\frac{d}{dx}\cos(\cos x)$, (e) $\frac{d}{dz}\sin(\cos z)$.

c17.2 Znaleźć: (a) $\frac{dy}{d\theta}$ jeśli $y=\cos\theta\sin\theta$, (b) $\frac{d}{du}\sin(\arccos u)$, (c) $\frac{d}{dz}\left[\cos^2(2z+1)\sin(2z+1)^2\right]$

c17.3 Znaleźć: (a) $\int_0^{9\pi/2}\sin 3t dt$ (b) $\int_{3\pi}^{5\pi/2}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta$, (c) $\int(\cos x^2)x\,dx$, (d) $\int(\sin^2\theta)\cos\theta\,d\theta$, (e) $\int\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)^3\sin\theta\,d\theta$.

c17.4 (a) Znaleźć wzór na $\sin 4\theta$ przy użyciu $\sin\theta$, $\cos\theta$, (b) Znaleźć wzór na $\sin 5\theta$ przy użyciu $\sin\theta$, $\cos\theta$, (c) Znaleźć wzór na $\cos(\theta/4)$ przy użyciu $\sin\theta$, $\cos\theta$, (d) Znaleźć wzór na $\cos(3\theta/2)$ przy użyciu $\sin\theta$, $\cos\theta$.

c17.5 Obliczyć (a) $\int\sin^2 x dx$ używając wzoru na $\sin 2x$, (b) $\int\cos^2 3x dx$, (c) $\int\sin^2 x\cos^2 x dx$, (d) $\int_{\pi/4}^{\pi/3}\sin\theta\sin(\theta/2)\,d\theta$.

c17.6 Zbadać przebieg następujących funkcji (a) $\theta\to 2\sin(\theta/2)$, (b) $x\to x+\sin x$, (c) $x\to\sqrt{\cos x}$ w przedziale $[-\pi/2,\pi/2]$.

c17.7 Obliczyć (a) $\frac{d}{dx}\mathrm{tg}\,(x^2)$ (b) $\frac{d^2}{dx^2}\mathrm{tg}^2 x$, (c) $\frac{d^2}{dx^2}x\mathrm{tg}\,x$

c17.8 Obliczyć (a) $\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}$ (b) $\frac{d}{dx}\mathrm{arctg}\sqrt{x}$, (c) $\frac{d^2}{dx^2}x\mathrm{arctg}\,(x^{-1/2})$ (d) $\int\frac{dz}{2z^2-6z+5}$

Zadania

z17.1 Znaleźć rozwiązanie równania różniczkowego $y''(x)=\cos\frac{x}{2}$

z17.2 Znaleźć rozwiązanie równania różniczkowego $y''(x)-2y'(x)=3\cos x$. Wskazówka: szukać rozwiązania postaci $y(x)=a\cos x+b\sin x$ dobierając odpowiednio stałe a,b.

z17.3 Udowodnić $\mathrm{tg}\ x=\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}$.

z17.4 Niech (x,y) będzie punktem na okręgu jednostkowym, różnym od $(-1,0)$. Udowodnić, że istnieje liczba t taka, że $x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $y=\frac{2t}{1+t^2}$.

z17.5 Obliczyć (a) $\int_0^{\pi/3}\frac{\mathrm{tg}\,\theta}{1+\mathrm{tg}^2\theta}d\theta$, (b) $\int_0^{\pi/4}\frac{1-\mathrm{tg}^2 x}{1+\mathrm{tg}^2 x}dx$, (c) $\int\frac{du}{a+bu^2}$.

z17.6 Udowodnić, (a) $\cos(\mathrm{arctg}\,u)=\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$ (b) $\mathrm{tg}\,(\arccos u)=\frac{\sqrt{1-u^2}}{u}$.

z17.7 Znaleźć rozwiązanie równania różniczkowego $\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{-t}{(1+t^2)^2}$ takie, że $x(0)=\pi/8$ i $x(1)=\pi$.