Wykład z analizy

Tydzień 18.

Logarytm i funkcja wykładnicza

Ćwiczenia

c18.1 Opisać poziome asymptoty funkcji $y = \frac{1+\log|x|}{x}$.
c18.2 Znaleźć: (a) $\int \frac{2x^3+x}{x^4+x^2}dx$,
(b) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right)\left(\frac{1}{1+\sqrt{s}}\right)ds$,
(c) $\int \frac{\frac{1}{y^2}}{1+\frac{1}{y}}dy$,
(d) $\int \frac{u-u^{-3}}{u^2+u^{-2}}du$,
(e) $\int \frac{\sqrt{\log z}}{z}dz$.
c18.3 Zbadać przebieg funkcji $[-4,1] \ni x \to x^2e^{2x}$,
c18.4 Oszacować od góry (a) $\frac{e^x}{x^2}$ dla $x = 1,2,3,4$,
(b) $\frac{e^x}{x^3}$ dla $x = 1,3,5,7$,
Oszacować od dołu (c) $\frac{x^2}{\log x}$ dla $x = 1,2,3,4$.
(**Wskazówka:** użyć nierówności z dowodu wzoru (10) streszczenia.)

Zadania

z18.1 Udowodnić: (a) $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$, dla $\alpha > 0$,
(b) $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha = 0$, dla $\alpha > 0$,
(c) Udowodnić, że funkcja $f(x) = Ae^{\alpha x}$ jest jedynym rozwiązaniem równania różniczkowego

$$f'(x) = \alpha f(x)$$

z warunkiem początkowym $f(0) = A$.
z18.2 Znaleźć: (a) $\int \frac{\sin u}{\cos^3 u}du$,
(b) $\int \frac{1+\mathrm{tg}^2 \log u}{u}du$,
(c) $\int \frac{dx}{x^2+x}$ (**Wskazówka:** zapisać $1/(x^2+x)$ w postaci $a/x + b/(1+x)$ dla pewnych a i b),
(d) $\int \frac{dz}{(1+z^2)(1+z)}$.
z18.3 Znaleźć rozwiązanie równania

$$\frac{d^2\ v(t)}{dt^2} = \frac{1}{t^2},$$

z warunkiem $v(1) = 0$ i $v(2) = 1 - \log 2$.
z18.4 Zbadać przebieg funkcji (a) $[-3,1] \ni x \to xe^{2x/3}$,
(b) $[0,4] \ni x \to \sqrt{x}e^{\sqrt{x}}$,
(c) $[-3,1] \ni x \to x^3e^{3x}$,
(d) $\mathbf{R}^+ \ni x \to x^2/\log x$,
(e) $\mathbf{R}^+ \ni x \to e^x/x^\alpha$ dla ustalonego $\alpha > 0$.
z18.5 Prześledzić dowód twierdzenia 18.15. i dla zadanego $\epsilon > 0$ znaleźć N takie, że jeśli $x > N$, to

$$1 - \epsilon < \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x e^{-\alpha} < 1 + \epsilon.$$